

DOI: 10.7511/jslx20210611002

任意边界条件下双模量矩形薄板的弯曲

曹彩芹, 宋永超*

(西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055)

摘要:将双模量板等效为两个各向同性小矩形板组成的层合板,假定该层合板的中性面即为两个小矩形板的交界面。根据中性面上应力为零且薄板全厚度上应力的代数和为零,推导了双模量矩形薄板的中性面位置。本文采用严宗达^[13]提出的带补充项的双重正弦傅里叶级数通解,该通解可以适用于任意边界条件的矩形薄板且不需要叠加或者重新构造。联立边界条件和控制方程,求得通解中的待定系数并代入到通解中,即可得到任意边界条件下双模量矩形薄板的弯曲解析解。与有限元结果比较,本文结果符合工程精度要求。

关键词:双模量板;矩形薄板;弯曲;任意边界条件

中图分类号:O343.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2022)06-0852-05

1 引言

玻璃和陶瓷等材料具有拉压弹性模量不同的力学特性,使用这种材料的薄板称为双模量板。双模量板的解析求解一直受到国内外相关学者的广泛关注。

文献[1]用康托洛维奇法和伽辽金法计算四边固支的双模量矩形板的弯曲,但是该文献只针对四边固支的矩形板,对于其他边界条件的板,没有给出合理的解法。文献[2]用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法研究双模量板的弯曲,但是该方法对于不同的边界条件需要重新假定挠度函数,计算较为不便。文献[3,4]分别分析了双模量矩形板和圆板的弯曲变形。以上文献都将坐标轴取在板的中性面上,但是在求解中性面的位置的过程中,没有充分考虑中性面上的正应力和切应力都为零的条件。

此外,文献[5]采用改进的渐进损伤分析方法预测了双模量复合材料层合结构的承载极限。文献[6]分析了拉压弹性模量差异对泡沫铝夹芯板三点弯曲模拟的影响。文献[7]研究了编织复合材料的双模量本构关系和细观模型。文献[8]用 Chebyshev 函数研究了双模量梁变形时的解析解。文献[9]基于牛顿-拉夫逊理论进行了拉压不同模量问题的数值求解。文献[10]用能量法研究了双模量大挠度圆板的轴对称弯曲。文献[11,12]也对双模量构件进行了研究。文献[13]提出了带补充项

的双重正弦傅里叶级数通解,该通解可以适用于任意边界条件的矩形薄板。

本文改进了板的中性面与板上表面的距离公式,经过分析可知本文方法是合理的。将文献[13]提出的通解应用到双模量矩形薄板中,求解了任意边界条件下双模量矩形薄板弯曲时的挠度函数。并将本文解与有限元解相比较,验证了本文方法的可靠性。

2 双模量矩形薄板的中性面位置

由于双模量板的拉压弹性模量不同,板的中性面位置不在板的中面处。为了将坐标轴取在中性面上,首先需要求出板的中性面位置。

将双模量板等效为两个各向同性小矩形板组成的层合板,如图1所示,两个小矩形板的交界处即为板的中性面。

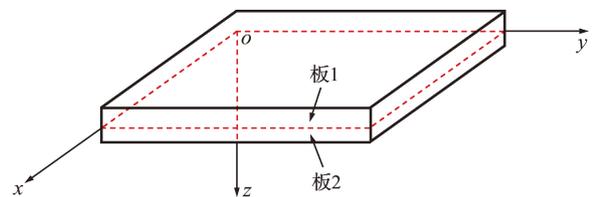


图1 两个各向同性小矩形板组成的层合板
Fig. 1 A laminate composed of two isotropic small rectangular plates

板的应力可由挠度函数表示为

$$\sigma_{xi} = \frac{-zE_i}{1-\mu_i^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_{yi} = \frac{-zE_i}{1-\mu_i^2} \left(\mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

收稿日期:2021-06-11;修改稿收到日期:2021-09-09.

作者简介:宋永超*(1996-),男,硕士生

(E-mail:1148856190@qq.com).

$$\tau_{xyi} = -2zG_{xyi} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

式中 $i=1,2$ 为第 i 个小矩形板; x, y 和 z 为板上某一点的坐标; E_i, μ_i 和 G_{xyi} 分别为第 i 个小矩形板的弹性模量、泊松比和切变模量, w 为板的挠度函数,一般为 $w(x, y)$ 的形式; σ_{xi}, σ_{yi} 和 τ_{xyi} 分别为第 i 个小矩形板 x 方向的正应力、 y 方向的正应力和切应力。

在薄板全厚度上,应力 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 各自的代数和均为 0,由此可以求出板的中性面位置。

$$\int_0^{h_0} \sigma_{x1} dz + \int_{h_0-h}^0 \sigma_{x2} dz = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^{h_0} \sigma_{y1} dz + \int_{h_0-h}^0 \sigma_{y2} dz = 0 \quad (5)$$

$$\int_0^{h_0} \tau_{xy1} dz + \int_{h_0-h}^0 \tau_{xy2} dz = 0 \quad (6)$$

式中 h_0 为板的中性面与板上表面的距离, h 为板的总厚度。

将式(1,2)分别代入式(4,5)得

$$\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_0} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{h_0-h}^0 z dz = 0 \quad (7)$$

$$\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(\mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_0} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left(\mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{h_0-h}^0 z dz = 0 \quad (8)$$

式(7,8)相加得

$$\frac{E_1}{1-\mu_1} \int_0^{h_0} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2} \int_{h_0-h}^0 z dz = 0 \quad (9)$$

解式(9),并考虑 $h_0 < h$,舍去不合理项得到一个满足式(7,8)的解

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1(1-\mu_2)/[E_2(1-\mu_1)]} + 1} h \quad (10)$$

式(7)减去式(8)得

$$\frac{E_1}{1+\mu_1} \int_0^{h_0} z dz + \frac{E_2}{1+\mu_2} \int_{h_0-h}^0 z dz = 0 \quad (11)$$

解式(11),得到第二个满足式(7,8)的解

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1(1+\mu_2)}/\sqrt{E_2(1+\mu_1)} + 1} h \quad (12)$$

将式(3)代入式(6),并解之,得到的结果与式(12)相同。

由于板的中性面唯一,由正应力与剪应力求得的中性面位置应该重合。因此,本文采用式(12)的值作为中性面与板上表面的距离。

文献[1-4]采用式(10)的值作为中性面距离板上表面的距离,其原因在于式(4,5)联立后本应有

两组解,即式(10,12),文献[1-4]只求出一组解,而且没有考虑式(6)的解。因此本文的方法更合理。

3 板的内力

由文献[14]及式(1~3)知,板的内力可表示为

$$M_x = \int_0^{h_0} z \sigma_{x1} dz + \int_{h_0-h}^0 z \sigma_{x2} dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

$$M_y = \int_0^{h_0} z \sigma_{y1} dz + \int_{h_0-h}^0 z \sigma_{y2} dz = -D \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$M_{xy} = \int_0^{h_0} z \tau_{xy1} dz + \int_{h_0-h}^0 z \tau_{xy2} dz = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (15)$$

$$F'_{sx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (\mu D + 4D_k) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (16)$$

$$F'_{sy} = \frac{\partial M_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (\mu D + 4D_k) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (17)$$

$$\text{式中 } D = \frac{E_1 h_0^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{E_2 (h_0-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} \quad (18)$$

$$\mu = \left[\frac{\mu_1 E_1 h_0^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{\mu_2 E_2 (h_0-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} \right] / \left[\frac{E_1 h_0^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{E_2 (h_0-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} \right] \quad (19)$$

$$D_k = \frac{E_1 h_0^3}{6(1+\mu_1)} - \frac{E_2 (h_0-h)^3}{6(1+\mu_2)} \quad (20)$$

4 控制方程和边界条件

4.1 双模量矩形薄板的弯曲控制方程

由文献[14]知,矩形薄板的弯曲平衡方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = q \quad (21)$$

式中 q 为板受到的横向荷载。

将式(13~15)代入式(21),得到双模量矩形薄板的弯曲控制方程

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = q \quad (22)$$

4.2 双模量矩形薄板的边界条件

参考文献[15],以 $x=0$ 的边与 $x=0, y=0$ 处的点 A 为例。

4.2.1 简支边的边界条件

若简支边发生支座沉降而产生挠度 ξ ,且板边受到分布弯矩 M 作用,则该边的边界条件可以表述为 $(w)_{x=0} = \xi, (M_x)_{x=0} = M$ 。

4.2.2 固定边的边界条件

若该边发生支座沉降而产生挠度 ξ 与转角 θ , 则该边的边界条件可以表述为 $(w)_{x=0} = \xi, (\partial w / \partial x)_{x=0} = \theta$.

4.2.3 自由边的边界条件

若该边受板边分布弯矩 M 和分布剪力 F 作用, 则该边的边界条件可以表述为 $(M_x)_{x=0} = M, (F_{sx})_{x=0} = F$.

4.2.4 角点的边界条件

若该角点为自由边交点且无支座, 当该点受集中荷载 P 作用时, 角点条件可以表述为 $2(M_{xy})_A = P$. 若该角点有支座且支座沉降产生挠度 ξ , 角点条件可以表述为 $(w)_A = \xi$.

5 通解的引入

本文采用严宗达^[13]提出的带补充项的双重正弦傅里叶级数通解, 形式如下,

$$\begin{aligned} w = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{6a} \left[\frac{E_n - F_n}{D} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{n^2 \pi^2 \mu (B_n - A_n)}{b^2} \right] x^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 \pi^2 \mu A_n}{b^2} - \frac{E_n}{D} \right) x^2 + \right. \\ & \left. \left[\frac{B_n - A_n}{a} + \frac{a}{6D} (F_n + 2E_n) - \frac{n^2 \pi^2 \mu a (B_n + 2A_n)}{6b^2} \right] x + \right. \\ & \left. A_n \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{6b} \left[\frac{G_m - H_m}{D} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{m^2 \pi^2 \mu (D_m - C_m)}{a^2} \right] y^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 \pi^2 \mu C_m}{a^2} - \frac{G_m}{D} \right) y^2 + \right. \\ & \left. \left[\frac{D_m - C_m}{b} + \frac{b}{6D} (H_m + 2G_m) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{m^2 \pi^2 \mu b (D_m + 2C_m)}{6a^2} \right] y + C_m \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} + \\ & \frac{1}{ab} (\omega_{oo} + \omega_{ob} - \omega_{ao} - \omega_{ab}) xy + \\ & \frac{1}{a} (\omega_{ao} - \omega_{oo}) x + \frac{1}{b} (\omega_{ob} - \omega_{oo}) y + \omega_{oo} \quad (23) \end{aligned}$$

式中 $\omega_{oo}, \omega_{ao}, \omega_{ob}, \omega_{ab}, A_n, B_n, C_m, D_m, E_n, F_n, G_m, H_m$ 和 b_{mn} 均为待定系数; a 和 b 分别为板的长和宽。

6 算例分析

6.1 四边简支双模量矩形薄板的弯曲分析

参考文献[2], 选取四边简支双模量矩形薄板, 板长 $a=2$ m, 板宽 $b=2$ m, 板厚 $h=0.1$ m; 压缩区弹性模量为 $E_1=30.38$ GPa, 泊松比 $\mu_1=0.35$; 拉伸区弹性模量为 $E_2=16.17$ GPa, 泊松比 $\mu_2=$

0.19。板受横向均布荷载作用, 荷载大小为 q 。采用本文方法, 解得板的中性面与板的上表面的距离为 $h_0=0.0473$ m。计算板中点处的挠度值 w_0 , 并与文献[2]解及有限单元法(FEM)的结果比较, 给出本文解与文献[2]解的误差。结果列入表1。

表1 板中点处的挠度值 w_0 (单位:mm)
Tab.1 Deflection value w_0 at the midpoint of the board (unit:mm)

$qa^4/h^4 (\times 10^{10})$	5	10	15	20	25	30
本文解	10.4	20.8	31.3	41.7	52.1	62.5
w_0 文献[2]解	10.0	20.7	30.8	40.5	51.5	59.3
FEM解	10.4	20.8	31.1	41.5	51.9	62.3
误差/%	4.00	0.48	1.62	2.96	1.17	5.40

由表1可知, 本文重新推导中性面位置并将双模量板等效为两个各向同性小矩形板组成的层合板的方法是有效的。且与文献[2]相比, 本文方法求得的结果更精确。

6.2 任意边界条件下双模量矩形薄板的弯曲分析

仍采用6.1节中双模量矩形薄板, 板厚 $h=0.02$ m; 板受横向均布荷载作用且 $q=625$ Pa。改变板的边界条件, 计算板的最大挠度值 w_{\max} 。结果列入表2。

对比表2的结果, 本文方法在计算任意边界条件下的双模量矩形薄板时, 得出的结果与有限元解接近。误差均在5%以内, 符合工程精度要求。

误差分析, 本文方法未考虑剪切变形的影响, 且采用直法线假定, 在挠度较大处存在较大误差。

7 结论

(1) 本文给出的双模量矩形薄板中性面的位置的计算方法充分考虑了应力 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 的分布, 使得在该中性面满足应力 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 都为0, 且全截面上应力的代数和也都为0。

(2) 将双模量板等效为两个各向同性小矩形板组成的层合板来计算, 从结果看, 该等效方法是合理的。

(3) 本文方法适用于任意边界条件的双模量矩形薄板, 而且该方法不需要叠加, 也不需要针对不同的边界条件重新构造通解。

(4) 本文的误差来自于薄板小挠度弯曲理论计算假定, 当板厚度较大或者板的挠度较大时, 该理论已经不再适用。

表2 各种边界条件下双模量矩形薄板的最大挠度值 w_{\max} (单位:mm)

Tab.2 Maximum deflection value w_{\max} of dual-modulus rectangular thin plates under various boundary conditions (unit:mm)

边界条件	本文解	FEM解	误差/%
CCCC	0.811	0.815	0.49
CCCS	1.028	1.029	0.10
CCSS	1.412	1.397	1.07
CSCS	1.229	1.224	0.41
CSSS	1.832	1.788	2.46
SSSS	2.590	2.475	4.65
CCCF	1.834	1.868	1.82
CCSF	3.537	3.580	1.20
CSCF	1.852	1.886	1.80
CSSF	3.733	3.764	0.82
SCSF	6.878	6.800	1.15
SSSF	7.889	7.688	2.61
CCF1F	3.762	3.800	1.00
CSF1F	6.900	6.994	1.34
SSF1F	9.107	8.988	1.32
CCFF	26.65	27.40	2.74
CSFF	43.32	44.62	2.91
SSFF	105.6	106.5	0.85
CFCF	1.812	1.843	1.68
CFSF	3.812	3.846	0.88
SFSF	9.274	8.903	4.17
CFFF	81.32	82.60	1.55
CFF1F	42.53	43.88	3.08
SFF1F	105.6	108.8	2.94
CF1F1F	6.931	7.073	2.01
SF1F1F	12.23	12.15	0.66
F1F1FF1	105.6	109.2	3.30
F1F1F1F1	16.44	16.35	0.55

参考文献(References):

- [1] 张 鹏,范存新.四边固支的双模量矩形板的弯曲计算[J].常州工学院学报,2015,28(6):1-6. (ZHANG Peng, FAN Cun-xin. Bending calculation of bimodulus rectangular plate with four edges clamped[J]. *Journal of Changzhou Institute of Technology*, 2015, 28(6):1-6. (in Chinese))
- [2] 吴 晓.用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法研究双模量板的弯曲[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2012,44(4):457-462. (WU Xiao. Using Kantorovich and Galerkin Solution to the bending of bi-modulus plate[J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2012, 44(4):457-462. (in Chinese))
- [3] 吴 晓,杨立军,孙 晋.双模量圆板弯曲变形的计算分析[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2009,41(1):88-92. (WU Xiao, YANG Li-jun, SUN Jin. Bending deformation calculation of bimodulus circular plate[J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2009, 41(1):88-92. (in Chinese))
- [4] 吴 晓,孙 晋,杨立军.双模量矩形板的弯曲计算分析[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2009,41(4):485-488. (WU Xiao, SUN Jin, YANG Li-jun. Bending calculation and analysis of bimodulus rectangular plate[J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2009, 41(4):485-488. (in Chinese))
- [5] 黄哲峰,李 力,杨增钦,等.双模量复合材料层合结构承载极限的预测[J].机械强度,2019,41(6):1445-1453. (HUANG Zhe-feng, LI Li, YANG Zeng-qin, et al. Prediction of load limit of bi-modulus composites laminated structure[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2019, 41(6):1445-1453. (in Chinese))
- [6] 李 鹏.基于等效双模量的泡沫铝夹芯板力学特性研究[D].青岛大学,2018. (LI Peng. Study on Mechanical Properties of Foam Aluminum Sandwich Plate Based on Equivalent Double Modulus[D]. Qingdao University, 2018. (in Chinese))
- [7] Jiang L X, Xiao S, Yang B, et al. Bimodulus constitutive relation and mesoscopic model of braided composites[J]. *Composite Structures*, 2021, 270:114115.
- [8] 韩朝晖.用 Chebyshev 函数研究双模量梁变形时的解析解[J].湘潭大学学报(自然科学版),2021,43(1):49-57. (HAN Zhao-hui. Research on the analytic solution of double modulus beam deformation based on chebyshev function[J]. *Journal of Xiangtan University (Natural Science Edition)*, 2021, 43(1):49-57. (in Chinese))
- [9] 乔赫廷,呼 婧,王世杰,等.基于牛顿-拉夫逊的拉压不同模量问题的数值求解[J].计算力学学报,2018,35(2):202-207. (QIAO He-ting, HU Jing, WANG Shi-jie, et al. A numerical algorithm for the problem of different modulus in tension and compression based on the Newton-raphson scheme[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, 35(2):202-207. (in Chinese))
- [10] 吴 晓,杨立军,黄 琳,等.用能量法研究双模量大挠度圆板的轴对称弯曲[J].计算力学学报,2011,28(2):274-278. (WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong, et al. Large deflection axisymmetric bending of bi-modulus circular plate with energy method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011,

- 28(2):274-278. (in Chinese))
- [11] Kanno Y. Accelerated proximal gradient method for bi-modulus static elasticity[J]. *Optimization and Engineering*, 2022, **23**(1):453-477.
- [12] Rohanifar M, Hatami-Marbini H. Numerical modeling of mechanical properties of 2D cellular solids with bi-modulus cell walls [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, **28**(3):321-329.
- [13] 严宗达. 结构力学中的富里叶级数解法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1989. (YAN Zong-da. *Fourier Series Solution in Structural Mechanics*[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1989. (in Chinese))
- [14] 徐芝纶. 弹性力学(下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1982. (XU Zhi-lun. *Elastic Mechanics* (2nd Edition) [M]. Beijing: People's Education Press, 1982. (in Chinese))
- [15] 王春玲, 季泽华. 一种可适用于正交异性矩形薄板弯曲稳定振动的双重正弦傅立叶级数通解[J]. 应用力学学报, 2010, **27**(3):616-621, 653. (WANG Chun-ling, JI Ze-hua. A double Fourier series solution for the bending, stability and vibration of orthotropic rectangular thin plate[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2010, **27**(3):616-621, 653. (in Chinese))

Bending of double modulus rectangular thin plates under arbitrary boundary conditions

CAO Cai-qin, SONG Yong-chao*

(School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: The dual-modulus plate is equivalent to a laminate composed of two isotropic small rectangular plates. It is assumed that the neutral surface of the laminate is the interface of the two small rectangular plates. According to the fact that the stress on the neutral plane is zero and the algebraic sum of the stress on the full thickness of the plate is zero, the position of the neutral plane of the double-modulus rectangular plate is derived. In this paper, the general solution of a double sine Fourier series with supplementary terms proposed by Yan Zongda is used. This general solution can be applied to rectangular thin plates with arbitrary boundary conditions and does not need to be superimposed or reconstructed. Simultaneous boundary conditions and governing equations are used to obtain the undetermined coefficients in the general solution and bring them into the general solution. Then, the analytical solution of the two-modulus rectangular thin plate under arbitrary boundary conditions can be obtained. Compared with the finite element results, the results obtained in this paper meet the engineering accuracy requirements.

Key words: dual-modulus plate; rectangular thin plate; bending; arbitrary boundary conditions

引用本文/Cite this paper:

曹彩芹, 宋永超. 任意边界条件下双模量矩形薄板的弯曲[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(6):852-856.

CAO Cai-qin, SONG Yong-chao. Bending of double modulus rectangular thin plates under arbitrary boundary conditions [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(6):852-856.