

DOI: 10.7511/jslx20210617002

# 压电压磁材料中正 $n$ 边形孔边裂纹分析

徐燕<sup>1</sup>, 杨娟<sup>\*2</sup>

(1. 宁夏大学新华学院, 银川 750021; 2. 宁夏大学民族预科教育学院, 银川 750002)

**摘要:** 基于电磁复合材料力学, 运用 Stroh 型公式和复变函数方法, 针对压电压磁材料中含正  $n$  边形孔边裂纹反平面问题进行了研究。利用 Schwarz-Christoffel 变换技术, 结合 Cauchy 积分公式和留数定理, 导出了磁电全非渗透型边界条件下任意正  $n$  边形裂纹尖端场强度因子和能量释放率的解析解。当缺失磁场时, 所得解退化为已有结果, 以此验证方法的有效性。通过数值算例, 对比分析了  $n=3, n=4$  和  $n=5$  三种特殊情形对应的孔口边长、裂纹长度和受到的力、电和磁载荷对等效场强度因子和无量纲能量释放率的影响规律。研究结果发现, 正  $n$  边形孔洞的尺寸和裂纹长度均会促进裂纹扩展, 且前者的影响更显著一些; 正  $n$  边形边的数量增加会阻止裂纹的扩展; 在磁电全非渗透型边界条件下, 机械载荷始终促进裂纹的扩展, 电位移载荷可以促进或抑制裂纹的扩展, 磁载荷对裂纹的扩展贡献较少。本研究结果适用于任意正  $n$  边形孔边裂纹求解问题, 为压电压磁材料元器件的优化设计和断裂特性分析提供了新思路。

**关键词:** 压电压磁材料; 正  $n$  边形孔边裂纹; 复变函数方法; 等效场强度因子; 能量释放率

**中图分类号:** O346 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2022)06-0754-07

## 1 引言

20 世纪 60 年代科学家首次注意到磁有序晶体中存在线性磁电效应<sup>[1]</sup>, 但仅是大多数单相磁电材料只在低于室温的环境下检测到微弱的磁电效应, 严格的温度/磁场范围限制了尖端技术领域对磁/电智能材料及元器件的广泛应用。直到 1972 年, 科学家第一次成功制备出磁电转换系数较大的压电压磁材料  $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ , 才逐渐拓宽了磁电智能材料的使用范围。压电压磁材料是一种新型的智能材料和信息功能材料, 同时具有优良的力电/力磁转化功能、较强的磁电耦合效应和对激励快速响应等优势, 广泛用于磁场探测器、磁电存储器、微机械传感器和智能滤波器等智能元器件中。近年来还在新能源、航天航空、生物医疗和国防信息化建设等领域具有巨大的应用潜能, 但是, 压电压磁材料天然固有的脆性特征, 使其在铸造过程中极易产生裂纹和孔洞等缺陷。在复杂的力、电和磁

耦合载荷环境下缺陷处容易引起应力集中分布, 最终导致材料断裂损坏<sup>[2]</sup>。断裂力学研究对于压电压磁材料和智能元器件的设计及其性能优化具有十分重要的工程价值和理论意义, 近年来成为人们关注的热点, 并在这方面已取得许多重要的研究成果<sup>[3-5]</sup>。

孔边裂纹问题的研究更是该领域中一个非常活跃的课题, 国内外学者已做了大量工作。文献[7,8]分别给出磁电弹性介质中圆孔边周期裂纹和椭圆孔边多裂纹反平面问题的解析解及数值算例。文献[9]求解了唇形裂纹反平面问题的解析解。文献[10]通过引入一个拱形映射公式, 讨论了磁电弹性体中含椭圆孔边不对称双裂纹的静力学和动力学问题。文献[11]通过将纳米椭圆孔简化为纳米裂纹, 获得问题的闭合解。文献[12]探索了表面效应对磁电弹性材料中含带四条裂纹的正  $4n$  边形纳米孔的影响。但是, 至今未发现关于压电压磁材料中正  $n$  边形孔边裂纹反平面断裂问题研究的报道。

## 2 压电压磁材料基本理论

本文对含正  $n$  边形孔口单裂纹的横观各向同性压电压磁材料的断裂性能的研究中, 以  $x_3$  轴为磁电极化方向, 以垂直于  $x_3$  轴的  $x_1-x_2$  平面为各向同性面, 故本构方程可化简为

收稿日期: 2021-06-17; 修改稿收到日期: 2021-08-24.

基金项目: 国家自然科学基金(12062022; 42064004); 宁夏自然科学基金(2020AAC03061); 宁夏高等学校科学研究项目(NGY2022112; Ngy2020013); 宁夏回族自治区 2019 年数学与应用数学一流专业资助项目.

作者简介: 杨娟\*(1982-), 女, 博士, 副教授  
(E-mail: yangjuan@nxu.edu.cn).

$$\begin{cases} \sigma_{3k} = c_{44} u_{3,k} + e_{15} \varphi_{,k} + q_{15} \Psi_{,k} \\ D_k = e_{15} u_{3,k} - k_{11} \varphi_{,k} - d_{11} \Psi_{,k} \quad (k=1,2) \\ B_k = q_{15} u_{3,k} - d_{11} \varphi_{,k} - \mu_{11} \Psi_{,k} \end{cases} \quad (1)$$

平衡方程及磁-电麦克斯韦方程

$$\sigma_{3i,i} + b_i = 0, D_{i,i} + b_e = 0, B_{i,i} + b_m = 0 \quad (i=1,2) \quad (2)$$

式中  $D_i, k_{11}, e_{15}$  和  $\varphi$  分别为电位移、介电常数、压电系数和电势;  $B_i, q_{15}, u_{11}, d_{11}$  和  $\Psi$  分别为磁感应强度、压磁系数、磁通率张量、磁电耦合系数和磁势;  $\sigma_{3i}, c_{44}$  和  $u$  分别为应力、弹性刚度张量和位移;  $b_i$  为单位体积力,  $b_e$  为体电荷密度,  $b_m$  为体电流<sup>[9]</sup>。

若不考虑体力、体电荷密度和体电流的作用, 即  $b_i = 0, b_e = 0$  和  $b_m = 0$ , 则

$$\mathbf{B}_0 \nabla^2 \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

式中  $\nabla^2$  为二维拉普拉斯算子, 且广义位移向量和材料系数矩阵可分别表示为

$$\mathbf{U} = [u_3, \varphi, \Psi]^T, \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & q_{15} \\ e_{15} & -k_{11} & -d_{11} \\ q_{15} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix} \quad (4)$$

因为  $|\mathbf{B}_0| \neq 0$ , 则由式(3)可得控制方程为

$$\nabla^2 \mathbf{U} = 0 \quad (5)$$

式(5)的一般解可表示为

$$\mathbf{U} = \mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{f}}(z) \quad (z = x_1 + ix_2) \quad (6)$$

利用 Stroh 公式, 引入一个广义应力函数向量  $\boldsymbol{\varphi}$ <sup>[13]</sup>, 可得

$$[\sigma_{31}, D_1, B_1]^T = -\boldsymbol{\varphi}_{,2}, [\sigma_{32}, D_2, B_2]^T = -\boldsymbol{\varphi}_{,1} \quad (7)$$

式中下标的逗号表示求偏导。

将式(1)代入式(7)得

$$-\boldsymbol{\varphi}_{,2} = B_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} + B_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial x_1}, \boldsymbol{\varphi}_{,1} = B_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} + B_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial x_2} \quad (8)$$

由式(8)可得

$$\boldsymbol{\varphi} = i\mathbf{B}_0 \mathbf{f}(z) - i\mathbf{B}_0 \bar{\mathbf{f}}(z) \quad (9)$$

因此, 式(6,9)的一般解可以写成 Stroh 公式的形式

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \mathbf{A}\bar{\mathbf{f}}(z), \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{f}}(z) \quad (z = x_1 + ix_2) \quad (10)$$

式中  $\mathbf{A} = \mathbf{I}, \mathbf{B} = i\mathbf{B}_0, \mathbf{I}$  为一个  $3 \times 3$  阶单位矩阵,  $\mathbf{f}(z)$  为一个由边界条件决定的解析函数向量。

### 3 压电电压磁材料中正 $n$ 边形孔边裂纹问题的解析解

#### 3.1 力学模型

如图 1 所示, 在含有正  $n$  边形孔口缺陷的无限大横观各向同性压电电压磁材料中, 有一条沿  $x_1$  轴方向的孔口边水平裂纹, 其长度表示为  $L$ , 其中缺

陷的孔口边长表示为  $a$ , 并沿磁电极化方向穿透。假设压电电压磁材料在无穷远场受均匀反平面剪切应力、面内电载荷和磁载荷共同作用。

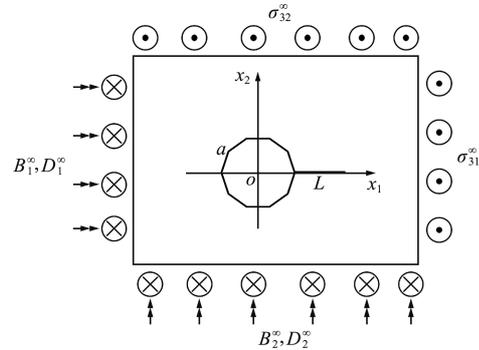


图 1 无限大压电电压磁材料中带单裂纹的正  $n$  边形孔口  
Fig. 1 Regular  $n$ -polygon hole with a crack in an infinite Piezoelectric/electromagnetic composite

#### 3.2 场强度因子

在压电电压磁材料内, 复势向量函数形式<sup>[14]</sup>为

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{c}^\infty z + \mathbf{f}_0(z) \quad (11)$$

式中  $\mathbf{c}^\infty$  为一个与远场载荷条件有关的复数形式的常向量,  $\mathbf{f}_0(z)$  为一个在无穷远处取值为零的未知复函数向量, 即  $\mathbf{f}_0(\infty) = 0$ 。

对式(10)关于  $x_1$  求偏导数, 得

$$\mathbf{U}_{,1} = \mathbf{A}\mathbf{F}(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{F}}(z), \boldsymbol{\varphi}_{,1} = \mathbf{B}\mathbf{F}(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{F}}(z) \quad (12)$$

式中  $\mathbf{F}(z) = d\mathbf{f}(z)/dz$ 。将式(11)代入式(12), 再令  $z \rightarrow \infty$  得

$$\mathbf{U}_{,1}^\infty = \mathbf{A}\mathbf{c}^\infty + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{c}}^\infty, \boldsymbol{\varphi}_{,1}^\infty = \mathbf{B}\mathbf{c}^\infty + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{c}}^\infty \quad (13)$$

式中  $\boldsymbol{\varphi}_{,1}^\infty = [\sigma_{32}^\infty, D_2^\infty, B_2^\infty]^T$

$$\mathbf{U}_{,1}^\infty = [\epsilon_{31}^\infty, -E_1^\infty, -H_1^\infty]^T \quad (14)$$

压电电压磁材料中正  $n$  边形孔边及其裂纹面上的力、电和磁边界条件可表示为

$$\mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}(z) = \int_s \mathbf{t}_s ds \quad (15)$$

$$\mathbf{t}_s = (t_3, -D_n, -B_n)^T$$

式中  $t_3$  为沿边界所受的反平面剪切应力,  $D_n$  为法向电位移,  $B_n$  为磁感应强度。

考虑磁电全非渗透型边界条件时, 假设孔口和裂纹面是自由的, 则式(15)化为

$$\mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}(z) = 0 \quad (16)$$

将式(11)代入式(16)得

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}_0(z) = -(\mathbf{B}\mathbf{c}^\infty z + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{c}}^\infty \bar{z}) \quad (17)$$

为了容易求解函数方程组, 引入合适的数值保角变换<sup>[15]</sup>

$$z = \omega(z_1) = R(z_1 + c_1 z_1^{1-n} + c_2 z_1^{1-2n} + \dots + c_k z_1^{1-kn}) \quad (18)$$

式中  $c_1 = \frac{2}{n(n-1)}, c_2 = \frac{n-2}{n^2(2n-1)}$

$$c_3 = \frac{(n-2)(2n-2)}{3n^3(3n-1)}$$

$$c_4 = \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)}{12n^4(4n-1)}$$

$$c_5 = \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)(4n-2)}{60n^5(5n-1)}, \dots$$

其中常数  $R$  为正  $n$  边形的形状系数,  $a$  为正  $n$  边形的边长. 此映射可将  $z$  平面上正  $n$  边形孔洞外部区域映射到  $z_1$  平面上单位圆孔外部区域.

利用式(18)能够把  $z$  平面上正  $n$  边形孔边裂纹外部区域映射到  $\zeta$  平面上单位圆内部, 获得复合映射函数为

$$z = \omega(\zeta) = R[\mu(\zeta) + c_1\mu^{1-n}(\zeta) + c_2\mu^{1-2n}(\zeta) + \dots + c_k\mu^{1-kn}(\zeta)] \quad (19)$$

式中  $\mu(\zeta)$  为一个可将圆孔及裂纹外部区域保角变换到单位圆内部的映射函数<sup>[16]</sup>

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{4\zeta} \left\{ \epsilon(1+\zeta)^2 + (1-\zeta)^2 + [(\epsilon^2-1)(1+\zeta)^4 + 2(1+\epsilon)(1-\zeta^2)^2]^{1/2} \right\} \quad (20)$$

式中  $\epsilon$  为一实参数, 且  $\epsilon = (1+l+(1+l)^{-1})/2$ , 其中  $l$  为  $z_1$  平面的裂纹长度, 点的对应关系式为

$$d+L = R[(1+l) + c_1(1+l)^{1-n} + c_2(1+l)^{1-2n} + \dots + c_k(1+l)^{1-kn}] \quad (21)$$

式中  $d$  为正  $n$  边形的顶点到中心的长度, 对应关系为  $z_1 = d+L = \omega(1)$ .

利用保角映射  $z = \omega(\zeta)$ , 式(17)在  $\zeta$  平面上可变为

$$\mathbf{B}f_0(\sigma) + \bar{\mathbf{B}}\bar{f}_0(\sigma) = -(\mathbf{B}c^\infty\omega(\sigma) + \bar{\mathbf{B}}\bar{c}^\infty\bar{\omega}(\sigma)) \quad (22)$$

式中  $\sigma = e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ,  $f_0(\sigma) = f_0(\omega(\sigma))$ . 将  $\bar{\sigma} = 1/\sigma$  代入式(20), 得  $\bar{\mu}(\sigma) = \mu(\sigma)$ . 再结合式(19)和式(13)的第二个公式, 则式(22)可以转化为

$$\mathbf{B}f_0(\sigma) + \bar{\mathbf{B}}\bar{f}_0(\sigma) = -\varphi_{,1}^\infty \omega(\sigma) \quad (23)$$

对式(23)两端同乘以  $\frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ , 并进行积分, 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{\mathbf{B}f_0(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{\bar{\mathbf{B}}\bar{f}_0(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\varphi_{,1}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{\omega(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (|\zeta| < 1) \quad (24)$$

运用 Cauchy 积分公式, 对  $|\zeta| < 1$  内任一点  $\zeta$  满足

$$\mathbf{B}f_0(\zeta) = -\varphi_{,1}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{\omega(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (|\zeta| < 1) \quad (25)$$

运用留数定理, 式(25)右端的积分结果可表示为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\tau \frac{\omega(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = \omega(\zeta) - \frac{R(\epsilon+1)}{2\zeta} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25), 并对两端关于  $\zeta$  求导, 得

$$\mathbf{B}\mathbf{F}_0(\zeta) = -\varphi_{,1}^\infty \left[ \omega'(\zeta) + \frac{R(\epsilon+1)}{2\zeta^2} \right] \quad (27)$$

式中  $\mathbf{F}_0(\zeta) = d\mathbf{f}_0(\zeta)/d\zeta$ , 且

$$\omega'(\zeta) = R\mu'(\zeta) [1 + c_1(1-n)\mu^{-n}(\zeta) + c_2(1-2n)\mu^{-2n}(\zeta) + \dots + c_k(1-kn)\mu^{-kn}(\zeta)] \quad (28)$$

式中

$$\mu'(\zeta) = \frac{\zeta^2-1}{4\zeta^2} \left\{ \epsilon+1 + [(\epsilon^2-1)(1+\zeta)^2 + 2(\epsilon+1)(1+\zeta^2)] / \left\{ \epsilon(1+\zeta)^2 + (1-\zeta)^2 + [(\epsilon^2-1)(1+\zeta)^4 + 2(\epsilon+1)(1-\zeta^2)^2]^{1/2} \right\} \right\}$$

由文献[17],  $\zeta$  平面内  $\zeta=1$  处的应力、电位移和磁感应强度因子可表示为

$$k_{imp} = [k_s, k_D, k_B]^T = 2\sqrt{\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\mathbf{B}\mathbf{F}_0(\zeta)}{\sqrt{\omega'(\zeta)}} \quad (29)$$

将式(27)和式(14)的第一个公式代入式(29)得

$$k_{imp} = \sqrt{\pi} \frac{R(\epsilon+1)}{\sqrt{\omega''(1)}} [\sigma_{32}^\infty, D_2^\infty, B_2^\infty]^T \quad (30)$$

式中  $\omega''(1) = R\mu''(1) [1 + c_1(1-n)\mu^{-n}(1) + c_2(1-2n)\mu^{-2n}(1) + \dots + c_k(1-kn)\mu^{-kn}(1)]$

$$\mu''(1) = \frac{(\epsilon+1)(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2-1})^2}{2(\epsilon^2-1 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2-1})} \quad (32)$$

式(29)除以  $\sqrt{\pi L'} [\sigma_{32}^\infty, D_2^\infty, B_2^\infty]^T$ , 得等效场强度因子为

$$K = R(\epsilon+1) / \sqrt{L'\omega''(1)} \quad (33)$$

式中  $L' = (h+L)/2$ , 当  $n$  取奇数时,  $h$  为正  $n$  边形的高, 当  $n$  取偶数时,  $h$  为正  $n$  边形的两个顶点之间的最大距离.

故式(30)可化简为

$$k_{imp} = K\sqrt{\pi L'} [\sigma_{32}^\infty, D_2^\infty, B_2^\infty]^T \quad (34)$$

当不考虑磁场时, 所得研究结果与文献[18]的结果相一致.

### 3.3 能量释放率

对于磁电全非渗透型裂纹, 能量释放率的数学表达式为<sup>[9]</sup>

$$G = \frac{1}{4} k_{imp}^T \mathbf{H} k_{imp} \quad (35)$$

式中

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{B}_0^{-1} = 2/(\det \mathbf{B}_0) \times \begin{bmatrix} k_{11}\mu_{11} - d_{11}^2 & e_{15}\mu_{11} - d_{11}q_{15} & k_{11}q_{15} - d_{11}e_{15} \\ e_{15}\mu_{11} - d_{11}q_{15} & -q_{15}^2 - c_{44}\mu_{11} & c_{44}d_{11} + e_{15}q_{15} \\ k_{11}q_{15} - d_{11}e_{15} & c_{44}d_{11} + e_{15}q_{15} & -e_{15}^2 - c_{44}k_{11} \end{bmatrix} \quad (36)$$

将式(34~36)代入式(35),得

$$G = \frac{\pi L' K^2}{2 \det \mathbf{B}_0} \Lambda \quad (37)$$

式中

$$\Lambda = (k_{11}\mu_{11} - d_{11}^2)(\sigma_{32}^\infty)^2 - (q_{15}^2 + c_{44}\mu_{11})(D_2^\infty)^2 - (e_{15}^2 + c_{44}k_{11})(B_2^\infty)^2 + 2(e_{15}\mu_{11} - d_{11}q_{15})\sigma_{32}^\infty D_2^\infty + 2(k_{11}q_{15} - d_{11}e_{15})\sigma_{32}^\infty B_2^\infty + 2(c_{44}d_{11} + e_{15}q_{15})D_2^\infty B_2^\infty$$

### 3.4 结果与讨论

(1) 当  $n=3$  时,由式(33,37)可获得压电压磁材料中正三角形孔边单裂纹问题的解析解

$$K^* = \frac{6\omega_1^2 \sqrt{R(\epsilon+1)(\epsilon^2-1+\epsilon\sqrt{\epsilon^2-1})}}{\sqrt{(9\omega_1^6-6\omega_1^4-1)(\sqrt{3}a/2+L)}} \quad (38)$$

$$G = [\pi L'(K^*)^2/(2\det \mathbf{B}_0)]\Lambda \quad (39)$$

式中  $\omega_1 = \epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ 。当不考虑磁场时,式(38,39)分别退化为压电复合材料中正三角形孔边单裂纹的等效场强度因子解析表达式和能量释放率的解析表达式。这与文献[3]的结果相吻合,验证了计算结果的正确性。

(2) 当  $n=4$  时,由式(33,37)可获得压电压磁材料中正四边形孔边单裂纹问题的解析解

$$K^{**} = \frac{8\omega_1^5 \sqrt{R(\epsilon+1)(\epsilon^2-1+\epsilon\sqrt{\epsilon^2-1})}}{\sqrt{(16\omega_1^{12}-8\omega_1^8-2\omega_1^4-1)(\sqrt{2}a+L)}} \quad (40)$$

$$G = [\pi L'(K^{**})^2/(2\det \mathbf{B}_0)]\Lambda \quad (41)$$

当不考虑磁场时,式(40,41)分别退化为压电复合材料中正四边形孔边单裂纹的等效场强度因子解析表达式和能量释放率的解析表达式。这与文献[5]退化为孔边单裂纹反平面问题的结果相吻合,由此进一步印证了计算方法的有效性。

(3) 当  $n=5$  时,由式(33,37)可获到压电压磁材料中正五边形孔边单裂纹问题的解析解

$$K^{***} = 25\omega_1^9 \sqrt{2R(\epsilon+1)(\epsilon^2-1+\epsilon\sqrt{\epsilon^2-1})} / \sqrt{(625\omega_1^{20}-250\omega_1^{15}-75\omega_1^{10}-40\omega_1^5-26)(1.86a+L)} \quad (42)$$

$$G = [\pi L'(K^{***})^2/(2\det \mathbf{B}_0)]\Lambda \quad (43)$$

## 4 数值算例及分析

本文以磁电弹性复合材料  $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$  为例,其材料常数如下<sup>[19]</sup>

$$c_{44} = 4.4 \times 10^{10} \text{ Pa}, e_{15} = 5.8 \text{ C/m}^2$$

$$k_{11} = 56.4 \times 10^{-10} \text{ C}^2/\text{Nm}^2, q_{15} = 275 \text{ N/Am}$$

$$\mu_{11} = 297 \times 10^{-6} \text{ Ns}^2/\text{C}^2$$

$$d_{11} = 5.2 \times 10^{-12} \text{ Ns/VC}$$

临界能量释放率为  $G_r = 5.0 \text{ N/m}$ 。

取  $n=3,4,5$ ,图2和图3分别显示了等效场强度因子  $K$  与裂纹长度  $L/a$  和孔口边长  $a$  的变化关系曲线。可以看出,裂纹长度和孔口边长起初增大都会引起裂纹扩展,后趋于稳定状态。另外,在相同条件下,  $n=3$  时对应的等效场强度因子最大。

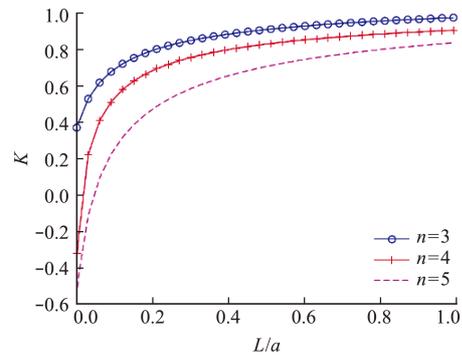


图2 等效场强度因子  $K$  随  $L/a$  的变化关系  
Fig. 2 Variation of  $K$  with  $L/a$

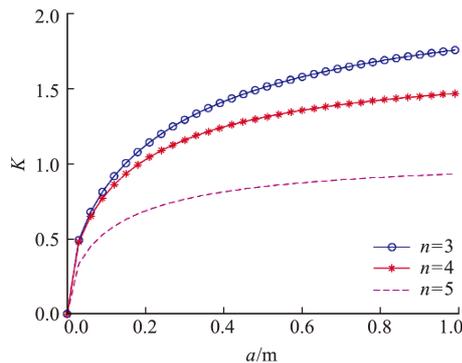


图3 等效场强度因子  $K$  随  $a$  的变化关系  
Fig. 3 Variation of  $K$  with  $a$

取  $L/a=0.01, a=0.02 \text{ m}$ 。图4给出了等效场应力强度因子  $K$  随正  $n$  边形边数量的变化关系曲线。可以看出,带一条裂纹的孔口为正三角形时等效场应力强度因子最大,随着正  $n$  边形边数的增加,等效场应力强度因子逐渐减小,并且趋于带一条裂纹的圆孔的等效场应力强度因子。所以图4表明正  $n$  边形边数越小,孔边裂纹扩展得越快。

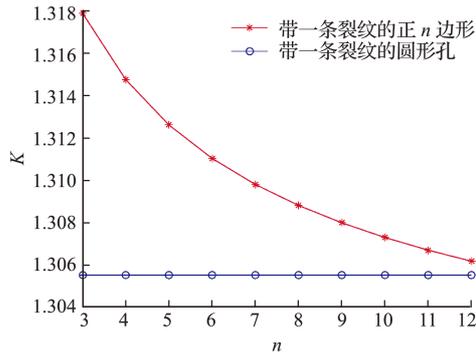


图4 等效场强度因子 K 随 n 的变化关系  
Fig.4 Variation of K with n

取  $n=3, 4, 5, \sigma_{32}^\infty=6 \text{ MPa}, D_2^\infty=2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2, B_2^\infty=2 \times 10^{-2} \text{ N/Am}$ 。图 5 显示了在磁电全非渗透边界条件下,无量纲能量释放率  $G/G_r$  与裂纹长度  $L/a$  的变化关系曲线。可以看出,无量纲能量释放率关于裂纹长度单调递增,且孔口边长越长,增大幅度越大。

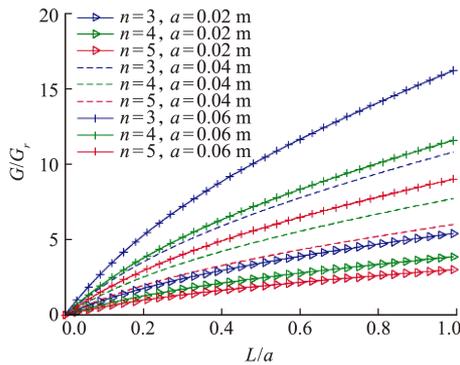


图5 对不同 a, 无量纲能量释放率  $G/G_r$  随  $L/a$  的变化关系  
Fig.5 Variation of  $G/G_r$  with  $L/a$  for different a

取  $n=3, 4, 5, L/a=0.01, a=0.02 \text{ m}$ 。图 6~图 8 分别显示了在磁电全非渗透边界条件下,无量纲能量释放率  $G/G_r$  与机械载荷  $\sigma_{32}^\infty$ 、电载荷  $D_2^\infty$  和磁载荷  $B_2^\infty$  的变化关系曲线。从图 6 可以看出,在给定的磁电环境下 ( $D_2^\infty=2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2, B_2^\infty=2 \times 10^{-2} \text{ N/Am}$ ),施加的机械载荷逐渐增加时,无量纲能量释放率急剧增长,这说明机械载荷始终促进裂纹扩展。并且当电载荷不变,  $B_2^\infty=2 \times 10^{-2} \text{ N/Am}$  时无量纲能量释放率与机械载荷的关系曲线位于  $B_2^\infty=-2 \times 10^{-2} \text{ N/Am}$  时无量纲能量释放率与机械载荷的关系曲线的上方。从图 7 可以看出,当  $B_2^\infty=2 \times 10^{-2} \text{ N/Am}, \sigma_{32}^\infty=6 \text{ MPa}$  时,无量纲能量释放率与施加电载荷大小的函数图像呈抛物线状。图 6 表明,负电载荷对裂纹有抑制作用,而正电载荷对裂纹扩展有促进或阻碍作用。因此,在实际工程中,施加合适的电载荷,可避免裂纹进一步扩展,提高材料的抗断裂能力。另外,当磁载荷不变,

$\sigma_{32}^\infty=6 \text{ MPa}$  时无量纲能量释放率与电载荷的关系曲线位于  $\sigma_{32}^\infty=4.2 \text{ MPa}$  时无量纲能量释放率与电载荷的关系曲线的上方。图 8 表明,当  $D_2^\infty=2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2, \sigma_{32}^\infty=6 \text{ MPa}$  时,负的磁载荷起到阻碍裂纹扩展的作用,正的磁载荷增大到一定程度也能阻止裂纹扩展。与此同时,当机械载荷不变,  $D_2^\infty=2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$  时无量纲能量释放率与磁载荷的关系曲线位于  $D_2^\infty=-2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$  时无量纲能量释放率与磁载荷的关系曲线的上方。

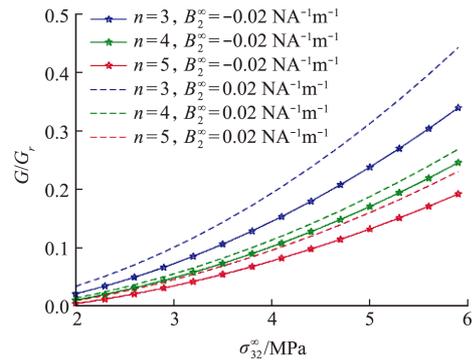


图6 对不同  $B_2^\infty$ , 无量纲能量释放率  $G/G_r$  随  $\sigma_{32}^\infty$  的变化关系  
Fig.6 Variation of  $G/G_r$  with  $\sigma_{32}^\infty$  for different  $B_2^\infty$

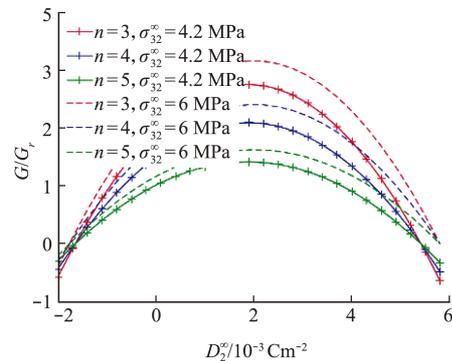


图7 对不同  $\sigma_{32}^\infty$ , 无量纲能量释放率  $G/G_r$  随  $D_2^\infty$  的变化关系  
Fig.7 Variation of  $G/G_r$  with  $D_2^\infty$  for different  $\sigma_{32}^\infty$

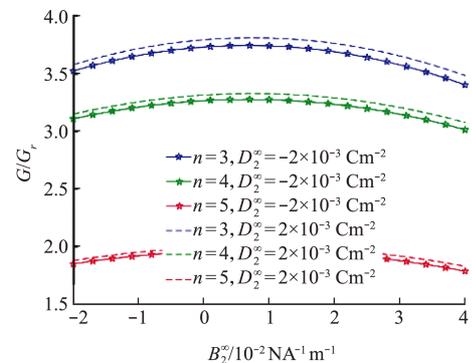


图8 对不同  $D_2^\infty$ , 无量纲能量释放率  $G/G_r$  随  $B_2^\infty$  的变化关系  
Fig.8 Variation of  $G/G_r$  with  $B_2^\infty$  for different  $D_2^\infty$

从图 6~图 8 可以看出,在相同条件下,  $n=3$  时对应的无量纲能量释放率最大,这说明材料中含正三角形孔边单裂纹更容易损坏。

## 5 结 论

本文采用复势法和 Schwarz-Christoffel(CS)变换技术,系统地研究了压电压磁材料中含带单裂纹的正 $n$ 边形孔边裂纹的反平面问题。所得的研究结果适用于任意规则多边形孔边裂纹问题。通过对几种特殊情形的数值算例结果绘图对比分析,揭示了压电压磁材料断裂的破坏机理。同时得到一些有用的结论。

(1) 正 $n$ 边形的孔洞边长尺寸和裂纹长度的增加会促进裂纹的扩展,并且孔洞边长尺寸变化对裂纹的扩展影响更显著一些。

(2) 在磁电全非渗透边界条件下,根据能量释放率准则,机械载荷对裂纹的扩展有显著影响;电位移载荷既能促进也能抑制裂纹的扩展;磁载荷对裂纹扩展的影响与电场相似,主要与所施加的机电载荷组合的大小有紧密联系,但磁场影响作用远小于电场。

(3) 在相同条件下,等效场强度因子和无量纲能量释放率随着正 $n$ 边形边的数量增加而逐渐减少,并最终无限接近于带一条裂纹圆孔的值。反之正 $n$ 边形边的数量越小,缺陷扩展越快。研究结果显示正三角形孔边裂纹构型更易损坏。

## 参考文献(References):

- [1] Landau L D, Lifshitz E M, Sykes J B, et al. Electrodynamics of continuous media [J]. *Physics Today*, 1961, **14**(10): 48-50.
- [2] 李永东,冯飞翔,石海滨,等.多铁性磁电智能复合材料的力学研究进展[J].装甲兵工程学院学报,2011, **25**(3): 1-8. (LI Yong-dong, FENG Fei-xiang, SHI Hai-bin, et al. Advances in mechanics research on multiferroic magnetoelectric smart composites [J]. *Journal of Academy of Armored Force Engineering*, 2011, **25**(3): 1-8. (in Chinese))
- [3] 王玮华,郭俊宏,邢永明.压电弹性体中光滑顶点的正三角形孔边裂纹的反平面问题分析[J].复合材料学报,2015, **32**(2): 601-607. (WANG Wei-hua, GUO Jun-hong, XING Yong-ming. Anti-plane problem analysis of edge crack emanating from regular triangle hole with smooth vertices in piezoelectroelastic solids [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2015, **32**(2): 601-607. (in Chinese))
- [4] 方飞,夏光辉,汪权,等.等效刚度对非线性压电俘能系统性能影响研究[J].计算力学学报,2020, **37**(5): 601-607. (FANG Fei, XIA Guang-hui, WANG Quan, et al. Study of the influence of equivalent stiffness on the performance of nonlinear piezoelectric energy harvesting system [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5): 601-607. (in Chinese))
- [5] Fan S W, Guo J H, Yu J. Anti-plane problem of four edge cracks emanating from a square hole in piezoelectric solids [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, **30**(1): 461-468.
- [6] 张宇,汪权,王建国.具有弹性放大器的双稳态压电俘能器建模及参数影响分析[J].计算力学学报,2020, **37**(2): 199-204. (ZHANG Yu, WANG Quan, WANG Jian-guo. Modeling and parameter influence analysis of bistable piezoelectric energy harvester with an elastic magnifier [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(2): 199-204. (in Chinese))
- [7] Guo J H, Lu Z X. Anti-plane analysis of multiple cracks originating from a circular hole in a magneto-electroelastic solid [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(14-15): 1847-1856.
- [8] Rogowski B. The mode III cracks emanating from an elliptical hole in the piezo-electro-magneto-elastic materials [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, **81**(11): 1607-1620.
- [9] 刘鑫,郭俊宏,于静.磁电弹性材料中唇形裂纹反平面问题[J].内蒙古大学学报(自然科学版),2016, **47**(1): 37-45. (LIU Xin, GUO Jun-hong, YU Jing. Anti-plane problem of a lip-shaped crack in a magneto-electro-elastic material [J]. *Journal of Inner Mongolia University (Natural Science Edition)*, 2016, **47**(1): 37-45. (in Chinese))
- [10] 白红光,郭怀民,赵国忠.磁电弹体中含不对称椭圆裂纹的动态与静态分析[J].新疆大学学报(自然科学版),2016, **33**(1): 62-68. (BAI Hong-guang, GUO Huai-ming, ZHAO Guo-zhong. Static and dynamic analysis for an elliptic hole with asymmetry edge cracks in a magneto-electro-elastic body [J]. *Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition)*, 2016, **33**(1): 62-68. (in Chinese))
- [11] Liu Y Z, Guo J H, Zhang X Y. Surface effect on a nano-elliptical hole or nano-crack in magneto-electro-elastic materials under antiplane shear [J]. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **99**(7): 123-136.
- [12] 杨东升,刘官厅.磁电弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的反平面问题断裂问题[J].物理学报,2020, **69**(24): 181-190. (YANG Dong-sheng, LIU Guan-ting. Anti-plane fracture problem of four nano-cracks emanating from a regular  $4n$ -polygon nano-hole in magneto-electroelastic materials [J]. *Acta*

- Physica Sinica*, 2020, **69**(24):181-190. (in Chinese))
- [13] Gao C F, Tong P, Zhang T Y. Fracture mechanics for a mode III crack in a magneto-electro-elastic solid [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(24-25):6613-6629.
- [14] Li X F, Lee K Y. Electroelastic behavior of a rectangular piezoelectric ceramic with an antiplane shear crack at arbitrary position [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2004, **23**(4):645-658.
- [15] Sharma D S. Stress distribution around polygonal holes [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, **65**(1):115-124.
- [16] Chen Z, Lu G, Liu G T. Stress analysis of the problem about a circular hole with four straight cracks [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, **41**(22):103-110.
- [17] Wang Y J, Gao C F. The mode III cracks originating from the edge of a circular hole in a piezoelectric solid [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(16):4590-4599.
- [18] 徐燕, 杨娟. 压电复合材料中正  $n$  边形孔边裂纹的反平面问题研究 [J]. *力学季刊*, 2021, **42**(2):279-290. (XU Yan, YANG Juan. Anti-plane problem of regular  $n$  polygon hole with radial edge crack in piezoelectric composites [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2021, **42**(2):279-290. (in Chinese))
- [19] Li X F. Dynamic analysis of a cracked magneto-electro-elastic medium under antiplane mechanical and in-plane electric and magnetic impacts [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(11-12):3185-3205.

## Analysis of regular $n$ -polygon hole with radial edge cracks in magneto-electro-elastic composites

XU Yan<sup>1</sup>, YANG Juan<sup>\*2</sup>

(1. Xinhua College of Ningxia University, Yinchuan 750021, China;

2. School of Preparatory Education for Nationalities, Ningxia University, Yinchuan 750002, China)

**Abstract:** Based on the mechanics of magneto-electro-elastic composite materials, using Stroh-type formula and complex variable function method, the anti-plane problem of regular  $n$ -polygon holes with radial edge cracks in piezoelectric-piezomagnetic materials was investigated in this paper. By means of the Schwarz-Christoffel transformation, combined with Cauchy integral formula and retention theorem, the problem of an arbitrary regular polygon hole with a radial edge crack was solved. The analytical solutions of the field intensity factor and energy release rate at the crack tip were obtained under the magneto-electrically impermeable boundary condition. In the absence of magnetic field, the obtained results can be reduced to the well-known results in order to verify the validity of the method. In addition, the numerical examples in special cases of  $n=3$ ,  $n=4$ ,  $n=5$  were provided to show the influences of hole size, crack length and applied mechanical-electric-magnetic loads on the equivalent field intensity factor and the dimensionless energy release rate. The research shows that, both the size of the regular  $n$ -polygon holes and the crack length can promote the crack growth, and the former has a more significant effect on the crack growth. Moreover, the increase in the number of  $n$ -polygon edges will retard crack propagation. Under the magneto-electrically impermeable boundary condition, the mechanical loads always accelerate the crack propagation, the electric displacements may promote or retard the crack propagation, and the magnetic loads have little contribution to crack growth. The results are suitable for calculating the problem of an arbitrary regular polygon hole with a radial edge crack, thereby providing a new idea for the optimal design and fracture analysis of piezoelectric-piezomagnetic materials.

**Key words:** piezoelectric-piezomagnetic materials; crack of regular  $n$ -polygon hole; complex variable function method; equivalent field intensity factors; energy release rate

引用本文/Cite this paper:

徐燕, 杨娟. 压电压磁材料中正  $n$  边形孔边裂纹分析 [J]. *计算力学学报*, 2022, **39**(6):754-760.

XU Yan, YANG Juan. Analysis of regular  $n$ -polygon hole with radial edge cracks in magneto-electro-elastic composites [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(6):754-760.