**Chinese Journal of Computational Mechanics** 

DOI: 10.7511/jslx20210424001

# 四边简支功能梯度圆锥壳的非线性振动分析

张宇航, 刘文光\*, 刘 超, 吕志鹏

(南昌航空大学 航空制造工程学院,南昌 330063)

摘 要:研究了四边简支条件下功能梯度圆锥壳的非线性自由振动。首先,通过 Voigt 模型和幂律分布模型描述了功能梯度材料的物理属性。然后,考虑 von-Karman 几何非线性建立了功能梯度圆锥壳的能量表达式,利用 Hamilton 原理推出圆锥壳的运动方程。在此基础上,采用 Galerkin 法,只考虑横向振动,功能梯度圆锥壳运动方程可简化为单自由度非线性振动微分方程。最后,通过改进的 L-P 法和 Runge-Kutta 法求解非线性振动方程,讨论功能梯度圆锥壳的非线性振动响应,分析几何参数和陶瓷体积分数指数对圆锥壳非线性频率响应的影响。结果表明,几何参数对非线性频率和响应的影响相较于陶瓷体积分数指数更明显;圆锥壳的几何参数和陶瓷体积分数指数通过改变非线性频率影响振动响应;功能梯度圆锥壳呈弹簧渐硬非线性振动特性。

关键词:功能梯度材料;圆锥壳;非线性;振动响应

中图分类号:TH212;O322

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2022)06-0722-07

# 1 引 言

由高韧性、耐腐蚀金属和耐高温陶瓷组成的功能梯度材料 FGMs(Functionally Gradient Materials)不仅具备良好的力学特性,而且具有优异的热防护性能,在高超音速飞行器的热防护系统设计中具有良好的应用前景。然而,由于高超音速飞行器服役时,振动贯穿其发射和飞行直至着落等全部过程,所以,了解 FGMs 结构的振动特性对于热防护系统的动力学设计具有重要的意义。

在高超音速飞行器结构中,板壳是最为常见的构件之一。近年来,针对 FGMs 板壳结构的振动力学问题,研究者做了大量的研究工作。蒋伟男等[1]研究了简支和固支边界条件下 FGMs 夹层板的自由振动。利用一阶剪切变形理论,Liu 等[2]讨论了多种边界条件下几何尺寸和材料组分对FGMs 圆柱壳模态频率的影响。结合 Love 薄壳理论和微分求积法,Ebrahimi 等[3]推导了 FGMs 壳的自由振动方程,分析了 FGMs 壳的模态频率。考虑材料沿径向呈梯度分布,滕兆春等[4]采用微分求积法求解了不同边界条件下 FGMs 环扇形板的自由振动频率。基于 Flügge 理论,杨萌等[5]研究了 FGMs 圆柱壳振动响应的计算方法。

收稿日期:2021-04-24;修改稿收到日期:2021-09-06. 基金项目:国家自然科学基金(51965042)资助项目. 作者简介:刘文光\*(1978-),男,博士,教授

(E-mail:liuwg14@nchu.edu.cn).

动载荷作用下,板壳结构经常发生大的几何变形,致使越来越多研究者关注 FGMs 板壳的非线性振动。Allahverdizadeh 等<sup>[6]</sup>建立了 FGMs 薄板的振动方程,采用半解析法求解了薄板的非线性自由振动和轴对称受迫振动。基于 Sigmoid 材料分布函数,Wang 等<sup>[7]</sup>研究了含孔隙 FGMs 薄板的非线性振动特性。基于 Kirchhoff 薄板理论,胡宇达等<sup>[8]</sup>研究了热环境对 FGMs 圆板非线性强迫振动响应的影响,分析了 FGMs 圆板进入混沌运动的路径。Nayfeh 等<sup>[9]</sup>采用多尺度分析法求解非线性方程,讨论了边界条件对圆板非线性振动响应的影响。考虑弹性基础的作用,Sheng 等<sup>[10]</sup>研究了弹簧系数对 FGMs 圆柱壳非线性振动的影响。考虑剪切应力的作用,Sofiyev 等<sup>[11]</sup>研究了正交异性FGMs 圆柱壳的非线性振动特性。

工程实践中,板壳结构广泛应用于航空航天领域,尤其在高超音速飞行器结构中,很多结构设计为圆锥形。在保证结构耐用性和使用寿命的前提下,圆锥壳不仅节省了材料用量、减轻了结构重量和提高了经济性能,而且圆锥壳有利于减少飞行阻力,提高飞行速度。高速飞行时,锥壳结构不可避免地要承受振动冲击和高温高压等载荷的作用,致使圆锥壳产生非线性振动[12,13]。与其他板壳结构不同,圆锥壳的半径随不同位置而不同,建模和计算的难度增大,甚至导致计算不可求。因此,本文以FGMs圆锥壳为对象,考虑von-Karman几何非线性,并结合 Galerkin 方法推导出 FGMs 圆锥壳

的单自由度非线性振动微分方程,并探讨圆锥壳几何参数以及陶瓷体积分数指数对非线性振动响应的影响,进一步推进 FGMs 在高超音速飞行器热防护结构上的应用。

#### 2 FGMs 圆锥壳模型

如图 1 所示为 FGMs 开口圆锥壳, 假设壳的几何尺寸分别为, 壳厚为 h, 母线长为 L, 圆锥小端的半径为  $R_1$ , 圆锥大端的半径为  $R_2$ , 圆锥壳的半锥角为  $\alpha_0$ , 圆锥壳的张角为  $\theta_0$ 。

以圆锥壳的中面为基准,建立图 1 所示的柱面 坐标系(x, $\theta$ ,z)。坐标系中,x表示圆锥壳的母线 方向, $\theta$ 表示圆锥的圆周方向,z表示圆锥壳的厚度 方向。

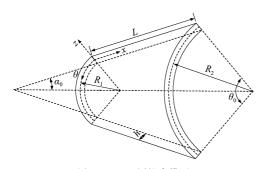


图 1 FGMs 圆锥壳模型 Fig. 1 FGMs conical shell model

假设 FGMs 圆锥壳的外表面为纯陶瓷,内表面为纯金属。材料沿厚度方向的分布用 Voigt 模型来描述[14],其物理属性表达式为

$$P(z) = P_c V_c(z) + P_m V_m(z)$$
 (1)

式中  $P_c$  和  $P_m$  分别为陶瓷和金属的材料属性(如弹性模量  $E_s$  密度 $\rho$  和泊松比 v), $V_c$  和  $V_m$  分别为陶瓷和金属的体积分数,体积分数采用幂律分布模型表示,具体表达式为

$$\begin{cases}
V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^N \\
V_c + V_m = 1
\end{cases}$$
(2)

式中 N为陶瓷体积分数指数。

### 3 FGMs 圆锥壳的运动方程

根据一阶剪切变形理论,FGMs 圆锥壳上任意 点的位移沿 x, $\theta$  和 z 轴上的分量可由中面上的位 移表示为<sup>[15]</sup>

$$\begin{cases} u(x,\theta,z,t) = u_0(x,\theta,t) + z\phi_x(x,\theta,t) \\ v(x,\theta,z,t) = v_0(x,\theta,t) + z\phi_\theta(x,\theta,t) \\ w(x,\theta,z,t) = w_0(x,\theta,t) \end{cases}$$
(3)

式中 u,v和 w 为圆锥壳上任意一点的位移,  $u_0$ ,

 $v_0$  和  $v_0$  为圆锥壳中面上的位移, $\Phi_x$  和  $\Phi_\theta$  分别为圆锥壳沿轴 x 和  $\theta$  方向的转角,t 为时间变量。

因此,FGMs 圆锥壳的动能 K为

$$K = \frac{1}{2} \int_{S} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^{2} \right\} \times$$

$$R(z) dS dz$$
(4)

圆锥壳中面任意一点的半径 R 是关于坐标 x 的函数,

$$R(x) = R_1 + x\sin(\alpha_0) \tag{5}$$

考虑 von-Karman 几何非线性,圆锥壳的应变 分量与中面位移分量的关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_{x} = \varepsilon_{x}^{0} + z\kappa_{x}, \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^{0} + z\kappa_{\theta}, \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^{0} + z\kappa_{x\theta} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{0}, \gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^{0} \end{cases}$$
(6)

土生

$$\begin{cases} \varepsilon_{x}^{0} = \frac{\partial u_{0}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{0}}{\partial x} \right)^{2} \\ \varepsilon_{\theta}^{0} = \frac{1}{R(x)} \left[ \sin(\alpha_{0}) u_{0} + \frac{\partial v_{0}}{\partial \theta} + \cos(\alpha_{0}) w_{0} + \frac{1}{2R(x)} \left( \frac{\partial w_{0}}{\partial \theta} \right)^{2} \right] \\ \gamma_{x\theta}^{0} = \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u_{0}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{0}}{\partial x} - \frac{\sin(\alpha_{0})}{R(x)} v_{0} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial w_{0}}{\partial x} \frac{\partial w_{0}}{\partial \theta} \end{cases}$$
(7)
$$\gamma_{xz}^{0} = \phi_{x} + \frac{\partial w_{0}}{\partial x}$$

$$\gamma_{\theta z}^{0} = \phi_{\theta} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial w_{0}}{\partial \theta} - \frac{1}{R(x)} \cos(\alpha_{0}) v_{0}$$

$$\kappa_{x} = \frac{\partial \phi_{x}}{\partial x}, \quad \kappa_{\theta} = \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin(\alpha_{0})}{R(x)} \phi_{x}$$

$$\kappa_{x\theta} = \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sin(\alpha_{0})}{R(x)} \phi_{\theta}$$

式中  $\varepsilon_x$  和  $\varepsilon_\theta$  为壳内任意一点沿 x 和  $\theta$  方向的正应 变, $\gamma_{x\theta}$  为  $x\theta$  平面内的切应变, $\gamma_{xz}$  为 xz 平面内的切应变, $\gamma_{xz}$  为  $\gamma_{x\theta}$  为  $\gamma_{x\theta}$  为  $\gamma_{x\theta}$  为  $\gamma_{x\theta}$  为  $\gamma_{x\theta}$  为  $\gamma_{x\theta}$  为 中面曲面应变分量, $\kappa_x$ , $\kappa_\theta$  和  $\kappa_{x\theta}$  为 中面曲面应变分量, $\kappa_x$  为  $\gamma_{\theta z}$  为 中面曲面应变分量, $\gamma_{\theta z}$  为  $\gamma_{\theta z}$   $\gamma_{\theta z}$  为  $\gamma_{\theta z}$   $\gamma_{\theta z$ 

基于胡克定律,FGMs 圆锥壳的应力应变关系为

$$\begin{cases}
\sigma_{x} \\
\sigma_{\theta} \\
\tau_{x\theta}
\end{cases} = 
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\
Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}
\end{bmatrix}
\begin{cases}
\varepsilon_{x} \\
\varepsilon_{\theta} \\
\gamma_{x\theta}
\end{cases} (8)$$

式中  $\sigma_x$  和  $\sigma_\theta$  为壳内任意一点沿 x 和  $\theta$  方向的正应力, $\tau_{x\theta}$  为  $x\theta$  平面内的切应力, $\tau_{xz}$  为 xz 平面的切应力, $\tau_{\theta z}$  为  $\theta z$  平面的切应力, $Q_{ij}(i,j=1,2,6)$  为

刚度元素。

因此,FGMs 圆锥壳的应变能 U 为

$$U = \frac{1}{2} \int_{S} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{x} \varepsilon_{x} + \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) R(x) dS dz$$

$$(9)$$

考虑式(14,15),根据 Hamilton 原理[2],FGMs 圆锥壳的运动方程可表示为

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R(x)} + \sin(\alpha_{0}) \frac{N_{x} - N_{\theta}}{R(x)} = I_{1} \ddot{u}_{0} + I_{2} \ddot{\phi}_{x} (10a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R(x)} + 2\sin(\alpha_{0}) \frac{N_{x\theta}}{R(x)} + \cos(\alpha_{0}) \frac{Q_{\theta z}}{R(x)} =$$

$$I_{1} \ddot{v}_{0} + I_{2} \ddot{\phi}_{\theta}$$

$$Q_{xz,x} + \frac{Q_{\theta z,\theta}}{R(x)} + \sin(\alpha_{0}) \frac{Q_{xz}}{R(x)} - \cos(\alpha_{0}) \frac{N_{\theta}}{R(x)} +$$

$$N_{x}w_{0,x}R(x)_{,x} + N_{x,x}w_{0,x}R(x) +$$

$$N_{x}w_{0,x}R(x)_{,x} + N_{x,x}w_{0,\theta} +$$

$$N_{x}w_{0,\theta,x}R(x) + \frac{N_{x\theta,x}w_{0,\theta}}{R(x)} +$$

$$\frac{N_{x\theta}w_{0,\theta x}}{R(x)} + \frac{N_{x\theta,\theta}w_{0,x}}{R(x)} + \frac{N_{x\theta}w_{0,x\theta}}{R(x)} +$$

$$\frac{N_{\theta,\theta}w_{0,\theta}}{R^{2}(x)} + \frac{N_{\theta}w_{0,\theta\theta}}{R^{2}(x)} = I_{1} \ddot{w}_{0}$$
(10c)

$$M_{x,x} + \frac{M_{x\theta,\theta}}{R(x)} + \sin(\alpha_0) \frac{M_x - M_\theta}{R(x)} - Q_{xz} = I_2 \ddot{u}_0 + I_3 \ddot{\phi}_x$$
(10d)

$$M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta,\theta}}{R(x)} + 2\sin(\alpha_0) \frac{M_{x\theta}}{R(x)} - Q_{\theta z} = I_2 \ddot{v}_0 + I_3 \ddot{\phi}_{\theta}$$
(10e)

式中  $N_x$ ,  $N_\theta$ 和  $N_{x\theta}$ 为内力,  $M_x$ 和  $M_\theta$ 为弯矩,  $M_{x\theta}$ 为扭矩,下标,表示对变量求导,上标 ·· 表示对时间 t 求二阶导数,  $I_1$ ,  $I_2$  和  $I_3$  为惯性矩,表达式为

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)(1, z, z^2) dz$$
 (11)

假设 FGMs 圆锥壳四边简支,其位移函数可表示为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} u_{0}(x,\theta,t) = u_{mn}(t)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_{0}}\right) \\ v_{0}(x,\theta,t) = v_{mn}(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_{0}}\right) \\ w_{0}(x,\theta,t) = w_{mn}(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_{0}}\right) \end{cases}$$
(12)  
$$\phi_{x}(x,\theta,t) = p_{mn}(t)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_{0}}\right)$$
$$\phi_{\theta}(x,\theta,t) = \frac{q_{mn}(t)}{R(x)}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_{0}}\right)$$

式中  $u_{mn}(t)$ ,  $v_{mn}(t)$ ,  $w_{mn}(t)$ ,  $p_{mn}(t)$  和  $q_{mn}(t)$  为关于时间 t的变量,n 和 m 分别为环向波数和轴向波数。

# 4 FGMs 圆锥壳的非线性振动求解

将式(12)代入式(10),应用 Galerkin 积分,只 考虑横向振动<sup>[17]</sup>,圆锥壳简化为单自由度模型,

 $\ddot{w}_{mn} + Q_1 w_{mn} + Q_2 w_{mn}^2 + Q_3 w_{mn}^3 = 0$  (13) 式中  $Q_1$  为线性刚度系数,  $Q_2$  和  $Q_3$  为非线性刚度系数。

为便于后续分析,令

W=
$$\omega_{mn}/h$$
, T= $[t/(\pi^2 H)]\sqrt{E_c/\rho_c}$   
(H=1 m) (14)

将式(14)代入式(13),可得

$$\ddot{W} + \bar{Q}_1 W + \bar{Q}_2 W^2 + \bar{Q}_3 W^3 = 0 \tag{15}$$

式中 
$$\overline{\mathbf{Q}}_i = h^{i-1} \mathbf{Q}_i / (\sqrt{\mathbf{E}_c/\rho_c}/\pi^2)^2$$

$$(i=1,2,3)$$
 (16)

考虑式(15)含强非线性项,使用 L-P 法求出的结果与实际有较大误差  $^{[18]}$ 。本文采用改进的 L-P 法分析 FGMs 圆锥壳的非线性振动。根据改进的 L-P 法,可得圆锥壳的非线性频率  $\omega_{mn,n-l}$  和位移 W,即

$$\omega_{mn,n-l} \approx \omega_{mn0} \sqrt{(1+\xi_{1}\alpha^{2})/(1-\alpha)}$$
(17)
$$W \approx \sum_{i=0}^{5} a_{i}\cos(i\omega_{mn,n-l}T)$$
(18)
$$\vec{\Xi} + \alpha = \frac{3Q_{3}A^{2}}{4Q_{1}+3Q_{3}A^{2}}$$

$$\xi_{1} = -\frac{40Q_{2}^{2}}{27Q_{3}^{2}A^{2}} + \frac{8Q_{2}}{9Q_{3}A} - \frac{1}{24}$$

$$a_{0} = -\frac{2\overline{Q}_{2}}{3\overline{Q}_{3}} + \frac{\overline{Q}_{2}}{2\overline{Q}_{3}} - \frac{16\overline{Q}_{2}^{2}}{27A\overline{Q}_{3}^{2}}$$

$$a_{1} = 1 - \frac{23A}{576} + \frac{13\overline{Q}_{2}}{54\overline{Q}_{3}} + \frac{29\overline{Q}_{2}^{2}}{81A\overline{Q}_{3}^{2}}$$

$$a_{2} = -\frac{4\overline{Q}_{2}}{27\overline{Q}_{3}} + \frac{16\overline{Q}_{2}^{2}}{81A\overline{Q}_{3}^{2}}$$

$$a_{3} = \frac{A}{24} + \frac{\overline{Q}_{2}}{18\overline{Q}_{3}} + \frac{\overline{Q}_{2}^{2}}{27A\overline{Q}_{3}^{2}}$$

$$a_{4} = \frac{\overline{Q}_{2}}{54\overline{Q}_{3}}, a_{5} = \frac{A}{576}$$
(19)

式中 A 为初始无量纲振幅, ω<sub>mn</sub>。为线性频率。

$$\omega_{mn0} = \sqrt{Q_1} \tag{20}$$

#### 5 讨论与分析

#### 5.1 模型验证

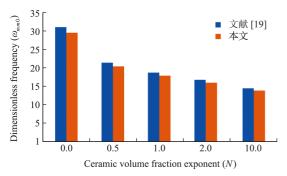
SUS304 和 Si<sub>3</sub> N<sub>4</sub> 的材料参数列入表 1。假设圆锥壳的几何尺寸为  $L/R_1 = 4$  ,  $R_1/h = 20$  ,  $\theta_0 = 120^\circ$  ,  $\alpha_0 = 15^\circ$  , h = 0. 01 m。通过式(20)计算了FGMs 圆锥壳的模态频率,并与文献[19]进行对

比,图 2结果表明,两者十分吻合。

表1 材料参数

Tab. 1 Material parameters

材料	弹性模量 E/GPa	泊松比 ▽	密度 ρ/kg•m <sup>-3</sup>
SUS304	207. 7877	0.3177	8166
$\mathrm{Si}_3\mathrm{N}_4$	322.27	0.3	2470



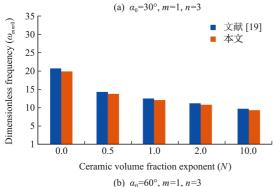


图 2 FGMs 圆锥壳无量纲频率的对比 Fig. 2 Comparison of dimensionless fundamental frequency of FGMs conical shell

图 3 和图 4 对比了 A=1 时的位移响应以及相图的解析解和数值解。结果表明,采用改进的L-P 法时,选取的阶数满足求解精度。因此,后续研究采用改进的 L-P 法计算非线性频率以及频域响应,使用 Runge-Kutta 法计算时域响应。

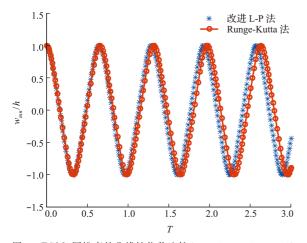


图 3 FGMs 圆锥壳的非线性位移比较(m=1, n=1, N=1) Fig. 3 Comparison on time-varying nonlinear displacements for FGMs conical shells (m=1, n=1, N=1)

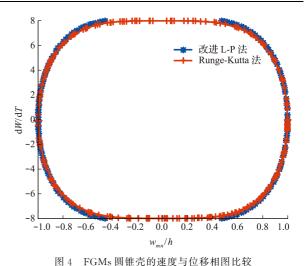


图 4 FGMs 圆锥元的迷皮与世传相图比较 Fig. 4 Comparison on phase plots of displacement-velocity for FGMs conical shells

#### 5.2 圆锥壳结构对振动频率的影响

图 5 研究了张角  $\theta_0$ 取 90°,120°和 180°时,圆锥角对非线性频率的影响。结果表明,当  $\alpha_0$ 取 0°~50°时,FGMs 圆锥壳的非线性频率随着锥角的增大而增大;当  $\alpha_0$ 大于 50°时,非线性频率显著下降,减小速率由明显趋于平缓。而当  $\alpha_0$ 越趋近 90°时,张角对 FGMs 圆锥壳的非线性频率影响微小。

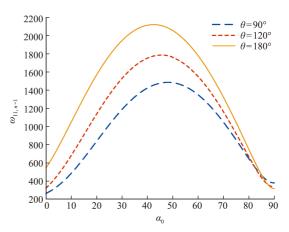


图 5 不同张角下圆锥角对频率的影响(N=1,A=0.01) Fig. 5 Effects of cone angles on frequency under different subtended angles (N=1,A=0.01)

图 6 研究了  $\alpha_0$ 分别取  $0^\circ$ ,30°和  $45^\circ$ 时,张角  $\theta_0$  对线性频率的影响。结果表明, $\theta_0$ 在  $20^\circ$ ~ $40^\circ$ 范围内时,非线性频率随  $\theta_0$ 的增大而减小,非线性频率下降幅度明显。在  $\theta_0$ 较小的范围内,锥角  $\alpha_0$ 的变化对 FGMs 圆锥壳的频率影响不大。在结构上,圆锥壳结构趋近闭合时,即  $\theta_0$ 不断增大至  $180^\circ$ ,此过程中其频率逐渐增大。值得一提的是,当  $\alpha_0$  =  $90^\circ$ 时,结构变为圆环结构,与取其他锥角情况不同,FGMs 圆锥壳的频率随  $\theta_0$ 增大而逐渐减小, $\theta_0$ 越大,频率的下降幅度越小,最后趋近于平稳。

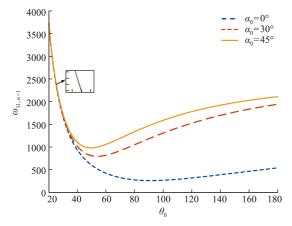


图 6 不同圆锥角下张角对频率的影响(N=1,A=0.01) Fig. 6 Effects of subtended angles on frequency under different cone angles (N=1,A=0.01)

分析认为,增大 FGMs 圆锥壳的张角,会降低锥角  $\alpha_0$  对频率的影响。即  $\theta_0$  取小值时,结构频率的变化主要取决于  $\theta_0$ ,与之相反,FGMs 圆锥壳趋于圆环时,频率变化主要受圆锥角  $\alpha_0$ 的影响。

#### 5.3 FGMs 组分对振动响应的影响

图 7 给出了不同陶瓷体积分数对圆锥壳频率 比的影响。图 8 研究了不同体积分布指数对圆锥 壳位移响应的影响。

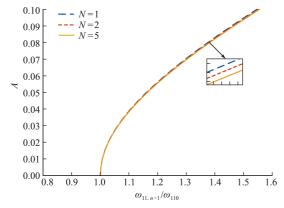


图 7 不同 N时振幅与非线性频率比的关系(A=0.01) Fig. 7 Relationship between amplitude and nonlinear frequency ratio under different N(A=0.01)

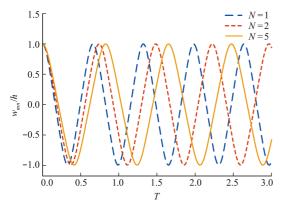


图 8 不同 N 时 FGMs 圆锥壳的位移-时间曲线 (*m*=1, *n*=1, A=1)

Fig. 8 Displacement-time curves of FGMs conical shell under different N(m=1,n=1,A=1)

结果表明,随着 N的增大,频率比增大,但整体上分布指数对频率影响不明显; N并不改变圆锥壳的振动趋势,只是通过影响频率从而改变振动周期。

#### 5.4 结构几何尺寸对振动响应的影响

图 9 研究了  $L/R_1$ 分别取 5,10 和 20 时,初始振幅对频率的影响。图 10 给出了  $L/R_1$ 对位移响应的影响。可以看出,振幅越大,频率比越大,且变化速率越来越快,是由于长径比越大,结构刚度减小,频率下降,导致振动周期增大。图 11 给出了不同  $h/R_1$ 时,频率比随振幅的变化情况。图 12 研究了  $h/R_1$ 

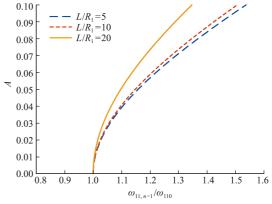


图 9 不同长径比时振幅与非线性频率比的关系(N=1,A=0.01) Fig. 9 Relationship between amplitude and nonlinear frequency ratio with different  $L/R_1$ (N=1,A=0.01)

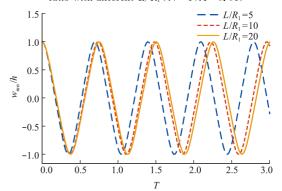


图 10 不同长径比时 FGMs 圆锥壳的位移-时间曲线 (m=1, n=1, N=1, A=1)

Fig. 10 Displacement-time curves of FGMs conical shells with different  $L/R_1$  ( m=1 , n=1 , N=1 , A=1)

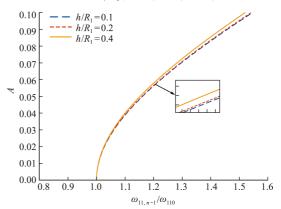


图 11 不同厚径比时振幅与非线性频率比的关系(N=1,A=0.01) Fig. 11 Relationship between amplitude and nonlinear frequency ratio with different  $h/R_1$ (N=1,A=0.01)

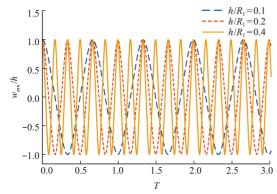


图 12 不同厚径比时 FGMs 圆锥壳的位移-时间曲线 (m=1, n=1, N=1, A=1)

Fig. 12 Displacement-time curves of FGMs conical shells with different  $h/R_1$  (m=1, n=1, N=1, A=1)

对位移响应的影响。分析发现,与  $L/R_1$ 类似, $h/R_1$ 越大,圆锥壳的非线性频率比越小。 $h/R_1$ 越大,圆锥壳的刚度越大,相对应的振动周期缩短。

## 6 结 论

在考虑 von-Karman 几何非线性的基础上,利用 Galerkin 法对圆锥壳的运动方程进行离散化处理,得到圆锥壳的非线性自由振动微分方程,然后采用改进的 L-P 法以及 Runge-Kutta 法求解,得到方程的解析解和数值解,研究了圆锥壳的几何尺寸以及陶瓷体积分布指数对其频率以及响应的影响。主要结论如下。

- (1) 增大 FGMs 圆锥壳的张角,锥角对频率的影响减小;当圆锥壳结构趋近于圆环时,圆锥壳的张角对频率影响甚微。因此,合理设计圆锥壳的圆锥角和张角可有效节约材料。
- (2)陶瓷体积分布指数越大,陶瓷材料占比越小,圆锥壳的刚度越小,非线性频率越小,振动周期随之增大。
- (3)增大圆锥壳的长度和厚度,圆锥壳的非线性频率比减小。因此,改变圆锥壳的几何参数会影响整个结构的振动响应。
- (4) 改变功能梯度材料的组分和锥壳的几何 尺寸,都会导致圆锥壳的非线性幅频特性曲线呈向 右弯曲的态势,圆锥壳具有明显的弹簧渐硬非线性 振动特性。

# 参考文献(References):

[1] 蒋伟男,郝育新,吕 梅. 几种边界条件下功能梯度夹层板自由振动分析[J]. 北京信息科技大学学报(自然科学版),2020,35(1):15-22. (JIANG Wei-nan, HAO Yu-xin, LÜ Mei. Free vibration analysis of functional

- gradient sandwich plates under several boundary conditions[J]. Journal of Beijing Information Science & Technology University (Nature Science Edition), 2020, 35(1):15-22. (in Chinese))
- [2] Liu C, Liu W G. Analysis of the modal frequency of a functionally graded cylindrical shell [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2021, 35 (3): 889-903.
- [3] Ebrahimi M J, Najafizadeh M M. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells [J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(1):308-324.
- [4] 藤兆春,朱亚文,蒲 育. FGM 环扇形板的面内自由 振动分析[J]. 计算力学学报,2018,35(5):560-566. (TENG Zhao-chun, ZHU Ya-wen, PU Yu. In-plane free vibration analysis of FGM annular sector plates [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2018,35(5):560-566. (in Chinese))
- [5] 杨 萌,李 戎,梁 斌. 基于 Flügge 理论的功能梯度圆柱壳自由振动响应均匀化转换计算方法[J]. 振动与冲击,2020,39(24):63-68,90. (YANG Meng, LI Rong, LIANG Bin. A homogenization transformation method for free vibration response of functionally graded cylindrical shells based on the Flügge theory [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(24):63-68,90. (in Chinese))
- [6] Allahverdizadeh A, Naei M H, Nikkhah B M. Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 310(4-5):966-984.
- [7] Wang Y Q,Zu J W. Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities
  [J]. Thin-Walled Structures, 2017, 119:911-924.
- [8] 胡宇达,张志强.热环境中功能梯度圆形薄板的混沌运动[J]. 计算力学学报,2012,29(2):267-272. (HU Yu-da, ZHANG Zhi-qiang. Chaos of thin circular functionally graded plate in thermal environment[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics,2012,29(2):267-272. (in Chinese))
- [9] Nayfeh A, Jilani A, Chin C M. Transverse vibrations of a centrally clamped rotating circular disk[A]. 39<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit [C]. 1998.
- [10] Sheng G G, Wang X, Fu G, et al. The nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(2):1421-1434.

- [11] Sofiyev A H. Nonlinear free vibration of shear deformable orthotropic functionally graded cylindrical shells[J]. Composite Structures, 2016, 142:35-44.
- [12] Sobhani E, Masoodi A R, Ahmadi-Pari A R. Vibration of FG-CNT and FG-GNP sandwich composite coupled Conical-Cylindrical-Conical shell [J]. Composite Structures, 2021, 273:114281.
- [13] 揭晓博. 航空发动机整体叶盘的非线性动力学研究 [D]. 北京工业大学, 2020. (JIE Xiao-bo. Nonlinear Dynamics Research of Aeroengine Bladed Disk[D]. Beijing University of Technology, 2020. (in Chinese))
- [14] Reddy J N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis (Second Edition)[M]. CRC Press, 2004.
- [15] Akavci S S, Tanrikulu A H. Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories[J]. Composites Part B: Engineering, 2015, 83:203-215.

- [16] Chan D Q, Quan T Q, Kim S E, et al. Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable piezoelectric functionally graded truncated conical panel in thermal environments [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2019, 77:103795.
- [17] Nosier A, Reddy J N. A study of non-linear dynamic equations of higher-order shear deformation plate theories[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1991, 26(2):233-249.
- [18] 翁智远. 关于对"正交各向异性扁球壳的非线性振动" 一文的 商権[J]. 振动与冲击,1991,38(2):75-76. (WENG Zhi-yuan. Discussion on "nonlinear vibration of orthotropic shallow spherical shell"[J]. Journal of Vibration and Shock, 1991,38(2):75-76. (in Chinese))
- [19] Akbari M, Kiani Y, Aghdam M M, et al. Free vibration of FGM Lévy conical panels [J]. Composite Structures, 2014, 116:732-746.

# Analysis of nonlinear vibration of a functionally graded conical shell with simply support at four edges

ZHANG Yu-hang, LIU Wen-guang\*, LIU Chao, LÜ Zhi-peng (School of Aeronautical Manufacturing Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: The purpose of this article is to study the nonlinear free vibration of a functionally graded conical shell simply supported at its four edges. Firstly, the Voigt model and the power-law distribution function were employed to describe the physical properties of the FGMs. Subsequently, the energy expression of the functionally graded conical shell considering von-Karman geometric nonlinearity was established, and the equations of motion were derived by the Hamilton principle. Thereafter, the equations of motion of the conical shell were simplified into a single degree of freedom nonlinear differential equation by using the Galerkin method and only considering only the transverse vibration. In the end, the nonlinear vibration equation was solved by the improved L-P method and the Runge-Kutta method. And the nonlinear vibration responses of the shell were analysed and the effects of geometric parameters and ceramic volume fraction exponents on the nonlinear frequency responses of the shell were discussed. Results indicate that the geometric parameters have more effects on the nonlinear frequency and the vibration response than the ceramic volume fraction exponents; the geometric parameters and the ceramic volume fraction exponents affect the vibration response by affecting the frequency; the conical shell presents the nonlinear characteristics of a hardening spring.

Key words: functionally graded materials; conical shell; nonlinear; vibration response

引用本文/Cite this paper:

张宇航,刘文光,刘 超,等. 四边简支功能梯度圆锥壳的非线性振动分析 [J]. 计算力学学报,2022,39(6):722-728.

ZHANG Yu-hang, LIU Wen-guang, LIU Chao, et al. Analysis of nonlinear vibration of a functionally graded conical shell with simply support at four edges [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2022, 39(6):722-728.