

DOI: 10.7511/jslx20210711001

# 弹性地基加肋功能梯度板自由振动分析的无网格法

陈思亚<sup>1</sup>, 陈卫<sup>1</sup>, 黄钟民<sup>1</sup>, 彭林欣<sup>\*1,2</sup>

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004;

2. 广西大学 广西防灾减灾与工程安全重点实验室 工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 南宁 530004)

**摘要:**基于一阶剪切变形理论和移动最小二乘近似研究 Winkler 弹性地基上加肋功能梯度板的固有频率。假设功能梯度板的材料性质沿厚度方向按幂函数连续变化, 基于物理中面和移动最小二乘近似分别推导功能梯度板和肋条的动能和势能, 再通过引入位移协调条件, 建立板和肋条节点参数转换关系, 叠加两者的总能量, 然后利用 Hamilton 原理推导加肋功能梯度板自由振动控制方程。采用完全转换法施加边界条件。通过将本文的计算结果与有限元以及文献的结果对比, 验证方法的收敛性以及准确性。

**关键词:**加肋功能梯度板; 无网格; 物理中面; Winkler 弹性地基; 自由振动

**中图分类号:** O325; O302

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2022)06-0691-08

## 1 引言

功能梯度材料 FGM (Functionally Graded Materials) 作为一种新型复合材料, 其组分在空间的连续变化, 使其性能也得以连续变化, 可以有效缓解应力集中等问题。FGM 凭借其优越的力学性能, 广泛应用于航天航空和建筑等领域。现已有很多文献基于经典板理论<sup>[1,2]</sup>、一阶剪切变形板理论<sup>[3,4]</sup>和高阶剪切板理论<sup>[5,6]</sup>对功能梯度板自由振动进行了研究。其研究多采用数值解法, 如有限单元法<sup>[7]</sup>、微分求积法<sup>[8]</sup>和自然单元法<sup>[9]</sup>等。

对于弹性地基上功能梯度板自由振动问题, 国内外也有诸多学者进行了研究。Yang 等<sup>[10]</sup>利用一维微分求积法和伽辽金法求解具有初始应力弹性地基功能梯度板的动力响应。Hosseini-Hashemi 等<sup>[11]</sup>提出中厚功能梯度板自由振动的解析解, 并用于分析弹性地基支撑的功能梯度板自由振动。Hasani 等<sup>[12]</sup>基于三阶剪切变形理论, 采用解析方法分析弹性地基功能梯度厚板的自由振动。Shahsavari 等<sup>[13]</sup>提出一种新的准三维理论, 分析功能梯度多孔板在弹性地基上的固有频率。滕兆春等<sup>[14]</sup>采用微分变换法研究了弹性地基功能梯度板受压时自由振动和屈曲特性。在研究功能梯度板的问

题时, 其控制方程除了可以基于几何中面建立, 也可以基于物理中面建立。对此, Zhang 等<sup>[15,16]</sup>在此方面做了大量工作, 结果表明基于物理中面建立的功能梯度板的控制方程可消除拉弯耦合的影响, 具有简化方程的优势。

上述文献很少有涉及弹性地基加肋功能梯度板的研究。文献<sup>[17,18]</sup>分别研究了弹性地基加肋斜板和变厚度加肋板的自由振动问题。Duc 等<sup>[19,20]</sup>采用伽辽金法和应力函数等方法, 在弹性地基加肋功能梯度板结构方面做了一些工作。

本文基于一阶剪切变形理论<sup>[21]</sup>和物理中面的概念, 利用移动最小二乘近似<sup>[22]</sup>推导近似位移场, 通过引入位移协调条件, 建立板和肋条节点参数转换关系, 分析 Winkler 弹性地基加肋功能梯度板的自由振动问题。讨论了边界条件和地基系数等对弹性地基加肋功能梯度板自振频率的影响。

## 2 弹性地基功能梯度肋板无网格模型

### 2.1 模型描述

如图 1 所示, 功能梯度矩形板由两种材料组成, 表面为陶瓷, 底面为金属; 在全局坐标系  $(x, y, z)$  下, 矩形板的长宽高分别为  $a, b$  和  $h_p$ , 肋条截面的高宽分别为  $h_s$  和  $t_s$ 。

假定材料常数沿厚度方向遵循如下规律变化

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + P_m \quad (1)$$

式中  $P$  为材料的物理参数, 如弹性模量  $E$  和密度  $\rho$  等;  $m$  和  $c$  分别代表金属和陶瓷;  $n$  为梯度指数; 由于泊松比  $\nu$  变化不大, 可以假定为常数。为了保

收稿日期: 2021-07-11; 修改稿收到日期: 2021-09-09.

基金项目: 国家自然科学基金(12162004; 11562001); 国家重点研发计划(2019YFC1511103); 广西科技重大专项(桂科 AA18118029)资助项目.

作者简介: 彭林欣\*(1977-), 男, 博士, 教授  
(E-mail: penglx@gxu.edu.cn).

证功能梯度板和肋条的连续性,肋条与板顶部材料一样。

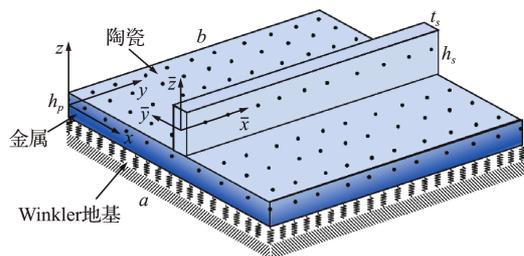


图1 Winkler弹性地基功能梯度加肋板无网格模型  
Fig.1 Meshless model of stiffened FGM plate resting on Winkler elastic foundation

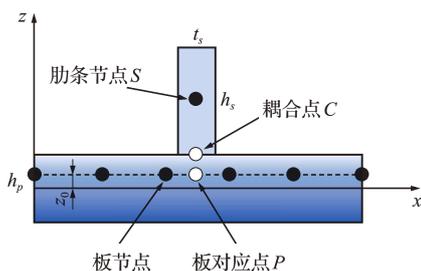


图2 位移协调  
Fig.2 Compatibility of displacement

功能梯度板与肋条的位移协调如图2所示, \$z\_0\$ 表示功能梯度板物理中面所在位置,定义为

$$z_0 = \int_{-h_p/2}^{h_p/2} z E(z) dz / \int_{-h_p/2}^{h_p/2} E(z) dz \quad (2)$$

## 2.2 移动最小二乘法近似

由移动最小二乘近似 (MLS)<sup>[22]</sup> 求出平板第 \$I\$ 个节点的形函数

$$H_I(\mathbf{X}) = \mathbf{p}(\mathbf{X})^T \mathbf{A}(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{B}_I(\mathbf{X}) \quad (3)$$

式中  $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{\text{Num}} \mathbf{p}(\mathbf{X}_I) \omega_I(\mathbf{X}) \mathbf{p}(\mathbf{X}_I)^T$

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \mathbf{p}(\mathbf{X}_I) \omega_I(\mathbf{X})$$

\$\mathbf{X}\_I\$ 和 \$\mathbf{X}\$ 分别为离散节点和未知点的坐标向量, \$\mathbf{p}(\mathbf{X})\$ 为基函数向量, 本文基函数均采用二次基, 一维 \$\mathbf{p}(\mathbf{X}) = [1, x, x^2]^T\$; 二维 \$\mathbf{p}(\mathbf{X}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T\$; \$\omega\_I\$ 为第 \$I\$ 个节点的权函数, 本文采用如下的三次样条权函数, 影响域为圆形影响域。Num 表示离散节点数目, 板节点取 \$np\$, 肋条节点取 \$ns\$。

$$\omega(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3 & (r \leq 1/2) \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4r^3/3 & (1/2 < r \leq 1) \\ 0 & (r > 1) \end{cases}$$

## 2.3 功能梯度板的能量方程

基于一阶剪切变形理论<sup>[21]</sup>和物理中面, 功能梯度板的位移场可以表示为

$$\mathbf{V}_p = \begin{cases} u_p(x, y, z, t) = \bar{u}_p(x, y, t) + (z - z_0) \varphi_x(x, y, t) \\ v_p(x, y, z, t) = \bar{v}_p(x, y, t) - (z - z_0) \varphi_y(x, y, t) \\ w_p(x, y, z, t) = \bar{w}_p(x, y, t) \end{cases} \quad (4)$$

式中 \$\bar{u}\_p, \bar{v}\_p, \bar{w}\_p\$ 和 \$\varphi\_x, \varphi\_y\$ 分别表示板物理中面点的平动和绕 \$x, y\$ 坐标轴的转动。

将式(4)表示为基于节点参数的插值, 即

$$\mathbf{V}_p = \sum_{I=1}^{np} \mathbf{N}_I \mathbf{d}_{pI} \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{N}_I = \begin{bmatrix} H_I & 0 & 0 & 0 & (z - z_0) H_I \\ 0 & H_I & 0 & (z_0 - z) H_I & 0 \\ 0 & 0 & H_I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\$\mathbf{d}\_{pI} = [\bar{u}\_p, \bar{v}\_p, \bar{w}\_p, \varphi\_x, \varphi\_y]^T\$ 和 \$H\_I\$ 分别表示板节点 \$I\$ 的位移参数(不是真实位移)和未知点在节点 \$I\$ 处的形函数。

根据几何方程<sup>[23]</sup>, 板的面内应变表达为

$$\boldsymbol{\kappa}_p = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]^T = \boldsymbol{\lambda}_\kappa \mathbf{d}_p = \sum_{I=1}^{np} \boldsymbol{\lambda}_\kappa H_I \mathbf{d}_{pI} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_p = [\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}]^T = \boldsymbol{\lambda}_\gamma \mathbf{d}_p = \sum_{I=1}^{np} \boldsymbol{\lambda}_\gamma H_I \mathbf{d}_{pI} \quad (7)$$

式中微分算子 \$\boldsymbol{\lambda}\_\kappa\$ 和 \$\boldsymbol{\lambda}\_\gamma\$ 分别为

$$\boldsymbol{\lambda}_\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & (z - z_0) \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & (z_0 - z) \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & (z_0 - z) \frac{\partial}{\partial x} & (z - z_0) \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

功能梯度板的形变势能为

$$U_p = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\kappa}_p^T \mathbf{D}_p \boldsymbol{\kappa}_p + \alpha G \boldsymbol{\gamma}_p^T \boldsymbol{\gamma}_p) dv = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_p^T \mathbf{K}_u \boldsymbol{\delta}_p \quad (8)$$

式中

$$[\mathbf{K}_u]_{IJ} = \iint \left[ \mathbf{B}_I^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{bmatrix} \mathbf{B}_J + \alpha G^* \mathbf{B}_{sI}^T \mathbf{B}_{sJ} \right] dx dy$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I1} & \mathbf{B}_{I2} \\ \mathbf{B}_{I2} & \mathbf{B}_{I3} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{I1} = \begin{bmatrix} H_{I,x} & 0 \\ 0 & H_{I,y} \\ H_{I,y} & H_{I,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{I3} = \begin{bmatrix} 0 & H_{I,x} \\ -H_{I,y} & 0 \\ -H_{I,x} & H_{I,y} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{I2} = \text{zeros}(3, 3)$$

$$\mathbf{B}_{sI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{I,x} & 0 & -H_I \\ 0 & 0 & H_{I,y} & H_I & 0 \end{bmatrix}$$

弹性矩阵 \$\mathbf{D}\_p\$ 和剪切模量 \$\mathbf{G}\$ 为

$$\mathbf{D}_p = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & (1 - \nu)/2 & & \\ & & & (1 - \nu)/2 & \\ & & & & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}, G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

\$a = 5/6\$ 为剪切修正因子, 表示对 \$x\$ 或 \$y\$ 求偏导;

板节点参数向量  $\delta_p = [d_{p1}^T, d_{p2}^T, \dots, d_{pn_p}^T]^T$ ; 拉伸刚度  $A^*$ 、耦合刚度  $C^*$ 、弯曲刚度  $D^*$  以及剪切刚度  $G^*$  表达式为

$$\begin{aligned} (A^*, C^*, D^*) &= \int_{-h_p/2}^{h_p/2} [1, z - z_0, (z - z_0)^2] \mathbf{D}_p dz \\ G^* &= \int_{-h_p/2}^{h_p/2} G dz \\ \text{由式(5)得板的动能表达为} \\ T_p &= \frac{1}{2} \int \rho(z) \frac{\partial \mathbf{V}_p^T}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial t} dv = \frac{1}{2} \dot{\delta}_p^T \mathbf{M}_p \dot{\delta}_p \quad (9) \end{aligned}$$

式中  $[\mathbf{M}_p]_{IJ} = \int \rho(z) \mathbf{N}_I^T \mathbf{N}_J dv$

假设弹性地基与功能梯度板底部紧密接触, Winkler 弹性地基系数为  $k_w$ , 则弹性地基接触势能为

$$W = \frac{1}{2} \int k_w \omega^2 dv = \frac{1}{2} \delta_p^T \mathbf{K}_\xi \delta_p \quad (10)$$

式中 
$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_w \end{bmatrix}$$

由式(8~10)得到板的总能量为

$$\Pi_p = T_p - U_p - W = \frac{1}{2} (\dot{\delta}_p^T \mathbf{M}_p \dot{\delta}_p - \delta_p^T \mathbf{K}_p \delta_p) \quad (11)$$

式中  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\xi$

### 2.4 肋条的能量方程

肋条采用 Timoshenko 梁理论, 在局部坐标下的肋条位移场  $\mathbf{V}_s$  为

$$\mathbf{V}_s = \begin{cases} u_s(\bar{x}, \bar{z}, t) = \bar{u}_s(\bar{x}, t) + \bar{z} \phi(\bar{x}, t) \\ \tau_{ws}(\bar{x}, \bar{z}, t) = \bar{\tau}_s(\bar{x}, t) \end{cases} \quad (12)$$

式中  $\bar{u}_s, \bar{\tau}_s$  和  $\phi$  分别表示肋条几何中面的平动和绕  $\bar{y}$  轴的转动。将式(12)用节点位移参数表达为

$$\mathbf{V}_s = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{N}_{si} \mathbf{d}_{si} \quad (13)$$

式中 
$$\mathbf{N}_{si} = \begin{bmatrix} H_{si}(\bar{x}) & 0 & \bar{z} H_{si}(\bar{x}) \\ 0 & H_{si}(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{d}_{si} = [\bar{u}_s, \bar{\tau}_s, \phi]^T$  和  $H_{si}$  分别表示肋条节点  $i$  的位移参数和未知点在  $i$  的形函数。

肋条的形变势能为

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{t_s E_c}{2} \int_{-h_s/2}^{h_s/2} \left[ \frac{\partial u_s}{\partial \bar{x}} + \bar{z} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right]^2 d\bar{z} d\bar{x} + \\ &\frac{\alpha A_s}{2} \int G_c \left[ \frac{\partial \tau_{ws}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right]^2 d\bar{x} = \frac{1}{2} \delta_s^T \mathbf{K}_s \delta_s \quad (14) \end{aligned}$$

式中

$$[\mathbf{K}_{su}]_{ij} = \int_{-h_s/2}^{h_s/2} t_s E_c \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{B}_{sj} d\bar{z} d\bar{x} + \alpha A_s \int G_c \bar{\mathbf{B}}_{si}^T \bar{\mathbf{B}}_{sj} d\bar{x}$$

$$\mathbf{B}_{si} = [H_{si, \bar{x}} \quad 0 \quad \bar{z} H_{si, \bar{x}}], \quad \bar{\mathbf{B}}_{si} = [0 \quad H_{si, \bar{x}} \quad H_{si}]$$

$E_c$  和  $G_c$  分别表示陶瓷的弹性模量和剪切模量;  $\bar{x}$  为对  $x$  的偏导;  $A_s$  为肋条的横截面积; 肋条离散节点

参数向量  $\delta_s = [d_{s1}^T, d_{s2}^T, \dots, d_{sn_s}^T]^T$ 。

由式(13)得肋条的动能表达为

$$T_s = \frac{1}{2} \int \rho_c \frac{\partial \mathbf{V}_s^T}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} d\bar{v} = \frac{1}{2} \dot{\delta}_s^T \mathbf{M}_s \dot{\delta}_s \quad (15)$$

式中  $[\mathbf{M}_s]_{ij} = \int \rho_c \mathbf{N}_{si}^T \mathbf{N}_{sj} d\bar{v}$ ,  $\rho_c$  为陶瓷的密度。

由式(14,15)得肋条的总能量为

$$\Pi_s = T_s - U_s = \frac{1}{2} (\dot{\delta}_s^T \mathbf{M}_s \dot{\delta}_s - \delta_s^T \mathbf{K}_s \delta_s) \quad (16)$$

### 2.5 位移协调

如图2所示, 肋条的任意离散节点  $S$  可在板上找到对应点  $P$  (不一定为板的离散节点), 肋条与板的位移在接触点  $C$  相等, 在  $C$  点的耦合关系为

$$\begin{aligned} (u_s)_C &= \cos(\bar{x}, x) (u_p)_C + \cos(\bar{x}, y) (v_p)_C \\ (\tau_{ws})_C &= (\tau_p)_C \\ (\phi)_C &= \cos(\bar{y}, x) (\phi_x)_C + \cos(\bar{y}, y) (\phi_y)_C \quad (17) \end{aligned}$$

将式(17)由节点位移参数表达为

$$\mathbf{d}_s = \mathbf{T}_{tr} \mathbf{d}_p \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{T}_{tr} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & 0 & e \cos(\bar{y}, x) & e \cos(\bar{y}, y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) \end{bmatrix}$$

$(\bar{x}, x)$  为局部坐标  $\bar{x}$  轴和整体坐标  $x$  轴之间的夹角, 偏心距  $e = (h_s + h_p)/2 - z_0$ 。

由式(18)可以推导肋条节点参数和板节点参数协调转换矩阵  $\mathbf{T}_{sp}$ , 详细推导过程可参考文献 [24,25]。肋条位置改变只需重新计算转换矩阵  $\mathbf{T}_{sp}$ , 不必改变板的节点分布。同时将肋条节点位移参数转换为板位移节点参数, 不会增加加肋板总体刚度矩阵大小。

### 2.6 自由振动控制方程

由式(11,16)可以得到整个加肋功能梯度板的总能量为

$$\Pi = \Pi_p + \sum \Pi_s = \frac{1}{2} (\dot{\delta}_p^T \mathbf{M} \dot{\delta}_p - \delta_p^T \mathbf{K} \delta_p) \quad (19)$$

式中  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \sum \mathbf{T}_{sp}^T \mathbf{M}_s \mathbf{T}_{sp}$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \sum \mathbf{T}_{sp}^T \mathbf{K}_s \mathbf{T}_{sp}$

由哈密顿原理,  $\delta \int_0^t \Pi dt = 0$ , 推导自由振动的控制方程为

$$\mathbf{K} \delta_p + \mathbf{M} \dot{\delta}_p = 0 \quad (20)$$

由式(20)可以推导功能梯度加肋板自由振动问题的特征方程为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \delta_p = 0 \quad (21)$$

由于移动最小二乘(MLS)构造的形函数不满足克罗内定理, 节点位移参数并不是真实位移。因此,

本文采用完全转换法<sup>[26]</sup>处理本质边界条件。

### 3 算例分析

通过与有限元以及文献对比验证本文方法的收敛性和有效性。有限元模型功能梯度板采用层合板建模,板和肋条分别采用四节点壳单元(S4R)和梁单元(B31),单元数目分别为10000和100。板节点均匀布置,肋条节点与铺设方向板节点数一致。本文质量矩阵、刚度矩阵以及板厚度方向的积分均采用高斯积分。加肋功能梯度矩形板的边界条件均按 $x=0, y=0, x=a$ 和 $y=b$ 的顺序给出,C代表固支,S为简支,F为自由。本文相对误差定义为 $(\lambda_{\text{本文}} - \lambda_{\text{有限元}}) / \lambda_{\text{有限元}}$ 。

#### 3.1 收敛性以及准确性分析

表1给出了不同节点布置方案对不同梯度指数弹性地基上四边简支功能梯度方板的基础频率的影响。功能梯度板由Al和 $\text{Al}_2\text{O}_3$ 组成,弹性模量E分别为70 GPa和380 GPa;密度 $\rho$ 分别为 $2702 \text{ kg/m}^3$ 和 $3800 \text{ kg/m}^3$ ;泊松比 $\nu=0.3$ 。无量纲弹性地基系数和无量纲频率为 $\mu_k = k_w b^4 / D_m, \lambda = \omega h_p \sqrt{\rho_m / E_m}$ ;弯曲刚度 $D_m = E_m h_p^3 / [12(1 - \nu^2)]$ 。无量纲弹性地基系数 $\mu_k=100$ 。由表1可知,该方法具有很好的收敛性,本文数值结果与准三维模型<sup>[13]</sup>和一阶剪切变形理论<sup>[27]</sup>文献解答吻合良好,与有限元解更吻合,表明本文方法计算精度高。

表1 弹性地基四边简支功能梯度方板的无量纲基础频率 $\lambda$

Tab.1 Non-dimensional fundamental frequency  $\lambda$  for the simply supported FGM square plate

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=5$	
本文	5×5	0.0299	0.0233	0.0215	0.0205
	7×7	0.0298	0.0233	0.0214	0.0205
	10×10	0.0298	0.0233	0.0214	0.0205
	15×15	0.0298	0.0234	0.0214	0.0204
有限元解	0.0298	0.0233	0.0214	0.0204	
文献[12]	0.0298	0.0238	0.0221	0.0210	
文献[13]	0.0298	0.0236	0.0218	0.0208	
文献[27]	0.0298	0.0235	0.0217	0.0207	

#### 3.2 单肋条功能梯度加肋板

以下算例的无量纲频率为 $\lambda = \omega b^2 / \pi^2 \sqrt{\rho_m h_p / D_m}$ ;功能梯度加肋板的无量纲尺寸 $\beta_1 = a/b, \beta_2 = h_p/b, \beta_3 = t_s/b, \beta_4 = h_s/h_p$ 。

在 $x=a/2$ 处放置单根肋条,采用 $\beta_1=1, \beta_2=0.05$ ,梯度系数 $n=3$ 的功能梯度板,此时地基系数 $\mu_k=10$ 。图3所示肋条尺寸为 $\beta_3=0.05, \beta_4=1$

时,本文与有限元结果相对误差随着节点数目增加的收敛性。可以看出,当板节点数为 $13 \times 13$ 时,本文前五阶频率和有限元的相对误差已很小,证明本文方法已收敛。在此后的算例中,板由 $15 \times 15$ 个均匀节点离散,肋条节点取15个均匀节点。表2给出弹性地基上四边简支加肋功能梯度板在不同肋条尺寸的前五阶无量纲频率,而表3给出的是肋条尺寸为 $\beta_3=0.05, \beta_4=2$ 边界条件不同的前五阶无量纲频率。表2的数据说明肋条对于一阶固有频率贡献较大,高 $h_s$ 的变化对于频率影响更为明显,而表3的结果则表明随着边界约束加强,固有频率增加。同时通过和有限元结果的对比,证明本文方法在计算弹性地基功能加肋板不同肋条尺寸和不同边界条件时均有较好的计算精度。此外,图4和图5还给出了 $\beta_3=0.05, \beta_4=1$ 和 $\beta_3=0.05, \beta_4=2$ 两种肋条分别在SSSS和SCFC的边界条件下前五阶无量纲系数随梯度系数变化的结果。可以看出,前五阶无量纲频率随着梯度系数的增大而降低。

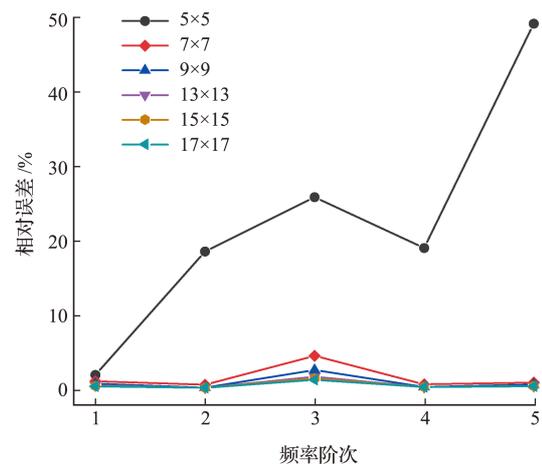


图3 y向单肋条功能梯度板无量纲频率收敛性  
Fig.3 Convergence of non-dimensional frequency for the FGM plate with one y-stiffener

表2 四边简支 $n=3$ 的y向单肋条功能梯度板的前五阶无量纲频率 $\lambda$

Tab.2 First five non-dimensional frequencies  $\lambda$  for the simply supported stiffened FGM plate with one y-stiffener and  $n=3$

$(\beta_3, \beta_4)$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
(0.05, 1)	本文	3.067	6.470	8.336	10.215	12.112
	有限元	3.055	6.457	8.231	10.184	12.064
(0.05, 2)	本文	4.301	6.470	10.215	10.424	11.948
	有限元	4.257	6.457	10.183	10.252	11.894
(0.05, 3)	本文	5.642	6.470	10.215	11.277	12.128
	有限元	5.567	6.457	10.184	11.119	12.065
(0.1, 1)	本文	3.303	6.470	8.846	10.215	11.693
	有限元	3.281	6.458	8.713	10.183	11.640

表3 不同边界下  $n=3$  的  $y$ 向单肋条功能梯度板的前五阶无量纲频率  $\lambda$

Tab.3 First five non-dimensional frequencies  $\lambda$  for FGM plate with one  $y$ -stiffener for  $n=3$  subjected to different boundary conditions

边界条件		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
SSSS	本文	4.301	6.470	10.215	10.424	11.947
	有限元	4.257	6.457	10.184	10.252	11.895
CCCC	本文	7.455	9.382	13.583	14.051	15.859
	有限元	7.270	9.349	13.715	13.920	15.692
CSSS	本文	4.610	7.630	10.324	11.880	13.521
	有限元	4.567	7.601	10.221	11.723	13.436
SCFC	本文	3.625	6.635	8.6736	8.933	12.310
	有限元	3.613	6.508	8.641	8.857	12.167

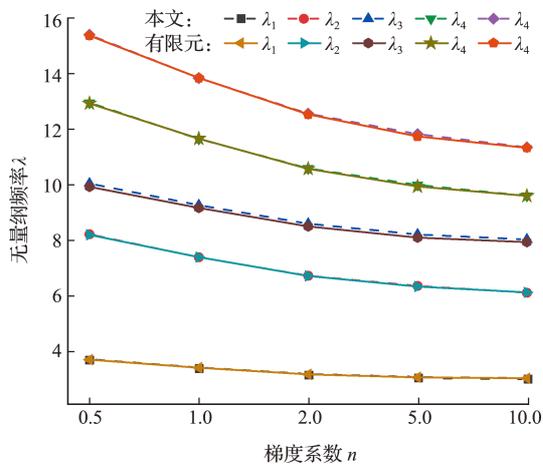


图4 不同梯度系数四边简支  $y$ 向肋条功能梯度板的前五阶无量纲频率  $\lambda$

Fig.4 First five non-dimensional frequencies  $\lambda$  for the simply supported FGM plate with one  $y$ -stiffener subjected to different gradient coefficients

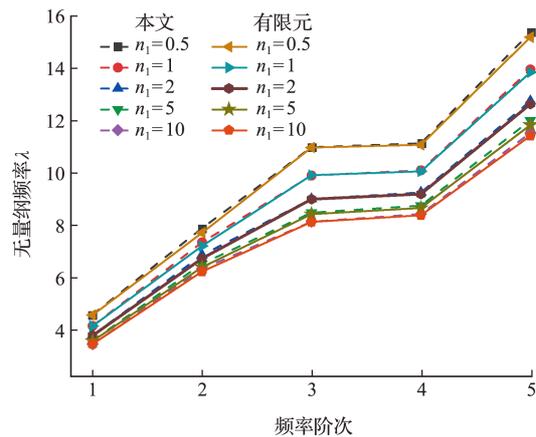


图5 不同梯度系数  $y$ 向肋条功能梯度板在边界为 SCFC 下的前五阶无量纲频率  $\lambda$

Fig.5 First five non-dimensional frequencies  $\lambda$  for stiffened FGM plate with one  $y$ -stiffener subjected to different gradient coefficients and SCFC boundary conditions

在  $\beta_3=0.05, \beta_4=2$  时,表4列出了梯度系数为3的四边简支单条中心加肋功能梯度板在不同地基系数下的前五阶固有频率。表5则给出各梯

度系数四边简支单条中心加肋功能梯度板的基础频率随着地基参数变化的数值结果。由表4和表5可知,随着无量纲地基系数的增加,各阶无量纲频率均有所提高,而基础频率随着梯度系数的增大而降低。

表4 不同地基系数下  $n=3$  的  $y$ 向单肋条功能梯度板前五阶无量纲频率  $\lambda$

Tab.4 First five non-dimensional frequencies  $\lambda$  for the FGM plate with one  $y$ -stiffener and  $n=3$  subjected to different foundation coefficients

$\mu_k$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
10	本文	4.301	6.470	10.215	10.424	11.948
	有限元	4.257	6.457	10.183	10.252	11.894
100	本文	4.380	6.534	10.255	10.461	11.976
	有限元	4.337	6.521	10.224	10.290	11.922
300	本文	4.551	6.673	10.344	10.544	12.039
	有限元	4.509	6.661	10.312	10.374	11.986
500	本文	4.716	6.810	10.432	10.625	12.102
	有限元	4.676	6.798	10.401	10.456	12.049

表5 不同地基系数各梯度  $y$ 向单肋条功能梯度板的无量纲基础频率  $\lambda$

Tab.5 Non-dimensional fundamental frequencies  $\lambda$  for the one  $y$ -stiffener's FGM plate with different gradients and different foundation coefficients

$\mu_k$		$n=0.5$	$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=10$
10	本文	4.796	4.557	4.362	4.272	4.250
	有限元	4.744	4.513	4.318	4.226	4.208
100	本文	4.858	4.626	4.438	4.354	4.335
	有限元	4.807	4.583	4.395	4.309	4.294
300	本文	4.994	4.776	4.602	4.531	4.518
	有限元	4.945	4.734	4.561	4.488	4.479
500	本文	5.127	4.921	4.761	4.701	4.693
	有限元	5.078	4.880	4.721	4.659	4.656

上述算例均表明,本方法在计算弹性地基加肋功能梯度板的不同边界条件和不同梯度系数等问题时,均具有较高的计算精度,验证了本方法求解这类问题的可靠性。

### 3.3 多肋条功能梯度加肋板

如图6所示,A型加肋功能梯度板横向和纵向中心各放置一根肋条,而B型加肋功能梯度板则是分别在两个方向等距布置三根肋条。加肋功能梯度板的几何尺寸为  $\beta_1=1, \beta_2=0.05, \beta_3=0.05, \beta_4=1$ 。

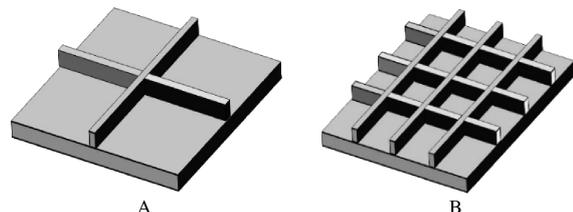


图6 肋条位置  
Fig.6 Rib's location

图7给出了不同梯度系数下四边简支A型加肋功能梯度板在无量纲地基系数为10时基频的收敛性情况。表7为四边简支不同梯度系数A型加肋功能梯度板在不同无量纲地基系数下的一阶固有频率和二阶固有频率。图8给出不同地基系数B型加肋功能梯度板在 $\mu_k=10$ 时不同边界条件下基频的变化,而表6则给出不同地基系数下四边固支B型加肋板的前五阶无量纲频率。从图7和图8及表6和表7可知,多肋条与单肋条具有相似规律,频率都是随着梯度系数的增大而降低,随着边界的加强而增大。上述计算结果误差均在5%以内,表明本方法在求解弹性地基上具有多肋条的功能梯度板固有频率时具有较高的求解精度。

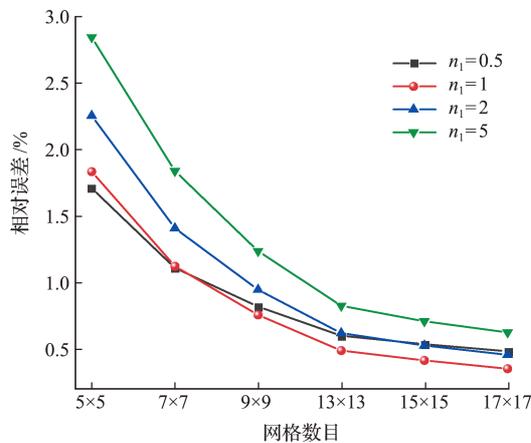


图7 A型加肋功能梯度板无量纲频率收敛性  
Fig. 7 Convergence of non-dimensional frequency for the type A stiffened FGM plate

表7 不同地基系数四边简支A型加肋功能梯度板的无量纲自振频率 $\lambda$

Tab. 7 Non-dimensional frequencies  $\lambda$  for the simply supported type A stiffened FGM plate with different foundation coefficients

$\mu_k$		$n=0.5$		$n=1$		$n=2$		$n=5$	
		本文	有限元	本文	有限元	本文	有限元	本文	有限元
10	$\lambda_1$	3.942	3.920	3.667	3.652	3.450	3.433	3.366	3.344
	$\lambda_2$	10.023	9.960	9.238	9.212	8.570	8.555	8.181	8.163
100	$\lambda_1$	4.016	3.995	3.751	3.736	3.543	3.527	3.465	3.444
	$\lambda_2$	10.056	9.993	9.276	9.250	8.613	8.598	8.228	8.210
200	$\lambda_1$	4.098	4.077	3.842	3.828	3.644	3.628	3.573	3.553
	$\lambda_2$	10.092	10.030	9.317	9.292	8.660	8.645	8.281	8.263
300	$\lambda_1$	4.177	4.157	3.930	3.917	3.742	3.726	3.678	3.658
	$\lambda_2$	10.129	10.066	9.359	9.333	8.707	8.692	8.333	8.315
400	$\lambda_1$	4.255	4.235	4.017	4.004	3.837	3.822	3.780	3.760
	$\lambda_2$	10.165	10.102	9.400	9.374	8.754	8.739	8.385	8.367
500	$\lambda_1$	4.332	4.313	4.102	4.089	3.930	3.915	3.879	3.860
	$\lambda_2$	10.201	10.138	9.441	9.415	8.801	8.785	8.437	8.418

#### 4 结论

本文基于 Winkler 弹性地基,采用一阶剪切变形理论和物理中面建立加肋功能梯度板自由振动

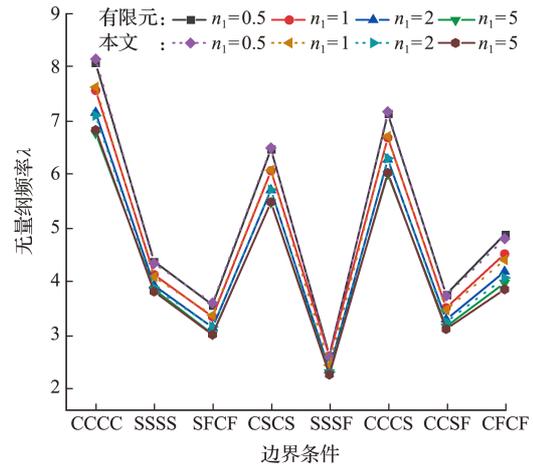


图8 B型加肋功能梯度板不同边界条件的无量纲基频  
Fig. 8 Non-dimensional fundamental frequency  $\lambda$  for the type B stiffened FGM plate under different boundary condition

表6 不同地基系数下 $n=3$ 的四边固支B型加肋功能梯度板前二阶无量纲频率 $\lambda$

Tab. 6 First two non-dimensional frequencies  $\lambda$  for the clamped supported type B stiffened FGM plate with  $n=3$  and with different foundation coefficients

$\mu_k$	$\lambda_1$		$\lambda_2$	
	本文	有限元	本文	有限元
10	6.939	6.884	13.228	12.910
100	6.978	6.924	13.249	12.931
500	7.151	7.098	13.339	13.024
1000	7.362	7.309	13.452	13.139
2000	7.765	7.715	13.674	13.365

控制方程,在肋条与板界面引入位移协调条件,将肋条位移转换为板位移,使得本方法在不增加总体刚度矩阵大小的情况下可以计算任意数量肋条的功能梯度加肋板。本方法对于网格没有依赖,肋条

位置改变时无需重新布置板的离散节点,仅计算协调矩阵  $\mathbf{T}_p$  即可。通过算例的对比验证表明本方法具有良好的收敛性和准确性。对于不同尺寸和数量的肋条的加肋功能梯度板,以及不同地基系数和边界条件下的固有频率求解均有较强适用性。计算结果表明,加肋功能梯度板的固有频率随着边界约束的加强和地基系数的增大而提高。

## 参考文献(References):

- [1] 曹志远. 各种边界条件平行四边形功能梯度板的动力特性解析解[J]. 力学季刊, 2006, **27**(2): 255-261. (CAO Zhi-yuan. Analytical solution of dynamic character for functionally graded material parallelogrammic plates with various boundary conditions[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2006, **27**(2): 255-261. (in Chinese))
- [2] Abrate S. Functionally graded plates behave like homogeneous plates[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2008, **39**(1): 151-158.
- [3] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour S R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, **53**(1): 11-22.
- [4] Zhao X, Lee Y Y, LIEW K M. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **319**(3-5): 918-939.
- [5] Talha M, Singh B N. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, **34**(12): 3991-4011.
- [6] Wattanasakulpong N, Prusty G B, Kelly D W. Free and forced vibration analysis using improved third-order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading[J]. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2013, **15**(5): 583-606.
- [7] 尹硕辉, 余天堂, 刘 鹏. 基于等几何有限元法的功能梯度板自由振动分析[J]. 振动与冲击, 2013, **32**(24): 180-186. (YIN Shuo-hui, YU Tian-tang, LIU Peng. Free vibration analysis of functionally graded plates using isogeometric finite element method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, **32**(24): 180-186. (in Chinese))
- [8] 蒲 育, 赵海英, 滕兆春. 四边弹性约束 FGM 矩形板面内自由振动的 DQM 求解[J]. 振动与冲击, 2016, **35**(17): 58-65. (PU Yu, ZHAO Hai-ying, TENG Zhao-chun. In-plane free vibration of FGM rectangular plates with 4 elastically restrained edges using differential quadrature method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, **35**(17): 58-65. (in Chinese))
- [9] 陈莘莘, 童谷生, 魏 星. 基于自然单元法的功能梯度中厚板自由振动分析[J]. 力学季刊, 2016, **37**(2): 345-353. (CHEN Shen-shen, TONG Gu-sheng, WEI Xing. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates using the natural element method[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2016, **37**(2): 345-353. (in Chinese))
- [10] Yang J, Shen H S. Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates[J]. *Composite Structures*, 2001, **54**(4): 497-508.
- [11] Hosseini-Hashemi S, Taher H R D, Akhavan H, et al. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, **34**(5): 1276-1291.
- [12] Hasani B A, Saidi A R, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation[J]. *Composite Structures*, 2011, **93**(7): 1842-1853.
- [13] Shahsavari D, Shahsavari M, Li L, et al. A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2018, **72**: 134-149.
- [14] 滕兆春, 王俊淋. Winkler-Pasternak 地基上四边受压 FGM 矩形板的自由振动与屈曲特性[J]. 兰州理工大学学报, 2021, **47**(1): 164-172. (TENG Zhao-chun, WANG Jun-lin. Free vibration and buckling characteristics of four-sides compressed FGM rectangular plates resting on Winkler-Pasternak foundation[J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2021, **47**(1): 164-172. (in Chinese))
- [15] Zhang D G, Zhou Y H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface[J]. *Computational Materials Science*, 2008, **44**(2): 716-720.
- [16] Zhang D G. Modeling and analysis of FGM rectangular plates based on physical neutral surface and high order shear deformation theory [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, **68**: 92-104.
- [17] 吴 宇, 覃 霞, 吴天文, 等. 基于无网格法的弹性地基加肋斜板频率数值解[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(1): 110-116. (WU Yu, QIN Xia, WU Tian-wen, et al. Numerical solution of frequencies of stiffened skew plate on elastic foundation via meshfree method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,

- 2019, **36**(1):110-116. (in Chinese))
- [18] 杨健生,曾治平,韦冬炎,等.基于无网格法的非均匀弹性地基上变厚度加筋板弯曲与固有频率分析[J].计算力学学报,2021, **38**(3):364-370. (YANG Jian-sheng, ZENG Zhi-ping, WEI Dong-yan, et al. Bending and natural frequency analysis of variable thickness stiffened plates on non-uniform elastic foundation based on meshless method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(3):364-370. (in Chinese))
- [19] Duc N D, Cong P H, Quang V D. Nonlinear dynamic and vibration analysis of piezoelectric eccentrically stiffened FGM plates in thermal environment[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, **115-116**:711-722.
- [20] Dinh Duc N, Hong C P. Nonlinear postbuckling of an eccentrically stiffened thin FGM plate resting on elastic foundations in thermal environments[J]. *Thin-Walled Structures*, 2014, **75**:103-112.
- [21] Reddy J N. *Theory and Analysis of Elastic Plates* [M]. Philadelphia, PA: Taylor & Francis, 1999.
- [22] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2):229-256.
- [23] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. *Finite Element Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [24] Peng L X, Tao Y P, Li H Q, et al. Geometric nonlinear meshless analysis of ribbed rectangular plates based on the FSDT and the moving least-squares approximation[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**:1-13.
- [25] 彭林欣.加肋板自由振动的移动最小二乘无单元分析[J].振动与冲击, 2011, **30**(6):67-73. (PENG Lin-xin. Moving-least-square meshless analysis on free vibration behavior of ribbed plates[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, **30**(6):67-73. (in Chinese))
- [26] Chen J S, Pan C H, Wu C T, et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1-4):195-227.
- [27] Tran T T, Nguyen P, Pham Q. Vibration analysis of FGM plates in thermal environment resting on elastic foundation using ES-MITC3 element and prediction of ANN[J]. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2021, **24**:100852.

## Meshless method for free vibration analysis of stiffened functionally graded plates resting on elastic foundation

CHEN Si-ya<sup>1</sup>, CHEN Wei<sup>1</sup>, HUANG Zhong-min<sup>1</sup>, PENG Lin-xin<sup>\*1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Key Laboratory of Engineering Disaster Prevention and Structural Safety, Ministry of Education, Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Reduction and Engineering Safety, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract:** Based on the first-order shear deformation theory (FSDT), the natural frequency of a stiffened functionally graded plate resting on a Winkler foundation is studied by moving-least-squares (MLS) approximation meshless method. It is assumed that the material properties of functionally graded plates change continuously in a power function along the thickness direction. The kinetic energy and potential energy of the functionally graded plate and those of its ribs are derived by the physical neutral surface and moving-least-squares approximation, respectively. The total energy of the plate and those of ribs were superposed by applying the displacement compatibility conditions. Then, the equation governing free vibration of the stiffened functionally graded plate is derived by Hamilton principle. The boundary condition is imposed by full transformation method. The convergence and accuracy of the method are verified by comparing the results of this paper with those of the finite element method (FEM) and the published literature.

**Key words:** stiffened functionally graded plate; meshless method; physical neutral surface; Winkler elastic foundation; free vibration

引用本文/Cite this paper:

陈思亚, 陈卫, 黄钟民, 等. 弹性地基加肋功能梯度板自由振动分析的无网格法[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(6):691-698.

CHEN Si-ya, CHEN Wei, HUANG Zhong-min, et al. Meshless method for free vibration analysis of stiffened functionally graded plates resting on elastic foundation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(6):691-698.