

DOI: 10.7511/jslx20210605002

# 矩阵摄动和 Newmark- $\beta$ 逐步积分相结合的 不确定性结构载荷识别

李晓旺\*, 黄科, 魏广威, 杨翔飞, 黄磊

(北京机械设备研究所, 北京 100854)

**摘要:** 为了反演作用在不确定性结构上的动态激励上下界, 在时域内建立了一个矩阵摄动和 Newmark- $\beta$  逐步积分相结合的载荷识别算法。首先依据矩阵摄动理论将动载荷近似表示为中值和摄动量相叠加的一阶泰勒多项式形式, 然后引入 Newmark- $\beta$  逐步积分算法对振动学微分方程解耦, 推导一个将输入载荷、输出响应和结构特性联系在一起的线性振动离散方程, 借助该方程反求出动载荷的中值和摄动量, 最终获得动载荷的上下边界。数值算例结果表明, 该方法可以高效准确地重建载荷的上下边界, 并具有优良的抗噪性能。

**关键词:** 矩阵摄动; Newmark- $\beta$ ; 不确定性结构; 时域; 载荷识别

**中图分类号:** TB123; O32

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2022)05-0677-07

## 1 引言

动载荷识别<sup>[1]</sup>是结构动力学研究中的第二类逆问题, 即已知系统特性和输出响应反求输入激励。快速准确获取结构的受力情况可以为结构的健康监测提供重要参考。对于确定性结构的载荷识别已经涌现出大量算法, 归纳起来主要有频域法<sup>[2-4]</sup>、时域法<sup>[5-7]</sup>以及智能算法<sup>[8,9]</sup>。然而, 在实际工程中也存在较多不确定性现象。这些不确定性与材料的理化性能、几何特性、边界条件、测量误差和分析模型等因素有关。如在工程实际中某个梁或桁架制造完成后发现原材料内部存在细微缺陷, 或者工作人员在制作过程中对长度和外径等尺寸测量不准确。在这些情况下, 就需要将结构对应的物理参数或尺寸参数作为不确定性参数来处理<sup>[10]</sup>。

目前专门针对不确定性结构进行的载荷识别工作还比较少, 现有的识别算法主要分为两种思路, 即蒙特卡洛模拟<sup>[11]</sup>和摄动理论<sup>[12-13]</sup>。蒙特卡洛模拟是最早出现的处理不确定性的方法, 其原理简单, 只需要在区间范围内对不确定参数大量重复采样, 对每一个采样点计算, 最终获得载荷的最大值和最小值。蒙特卡洛模拟的缺点是计算量过大, 运算效率极低。孙兴盛等<sup>[13]</sup>将所求载荷在不确定性参数的邻域内展开成一阶级数, 分别计算载荷中值和一阶摄动量, 从而建立了针对不确定性结构进

行激励反演的矩阵摄动方法。然而, 该摄动方法需要对载荷时间历程的每一个时刻都计算一次中值和摄动值。由于在时域内动态激励的时间历程一般都含有大量时间步, 因此会导致迭代步骤过多, 运算量较大。

为了弥补现有的不确定性结构载荷识别方法存在的不足, 本文在时域内建立了一种矩阵摄动和 Newmark- $\beta$  逐步积分相结合的算法。首先借助矩阵摄动理论将动态载荷表示成中值和一阶摄动量叠加的形式, 然后引入 Newmark- $\beta$  逐步积分法分别反求载荷中值和一阶摄动值, 最后将载荷中值与一阶摄动值进行加减运算, 从而确定动态激励的上下界。仿真算例验证了该方法能够高效准确地反演出载荷边界, 并有力抵御噪声干扰。

## 2 载荷识别算法

### 2.1 Newmark- $\beta$ 逐步积分算法

对于一个多自由度线弹性结构, 振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵,  $\mathbf{F}(t)$  为施加在结构上的动载荷,  $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$  和  $\mathbf{X}$  分别为加速度、速度和位移响应。

假设阻尼形式为瑞利阻尼<sup>[14]</sup>, 则阻尼矩阵可以表示为

$$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{M} + c_2 \mathbf{K} \quad (2)$$

Newmark- $\beta$  法的核心是对相邻时间  $t_i$  和  $t_{i+1}$  内的加速度响应  $\ddot{\mathbf{X}}_i$  和  $\ddot{\mathbf{X}}_{i+1}$  之间的值做出合理假设, 设  $\ddot{\mathbf{X}}_i$  和  $\ddot{\mathbf{X}}_{i+1}$  之间的某一点  $\ddot{\mathbf{X}}$  的值可以表示为

收稿日期: 2021-06-05; 修改稿收到日期: 2021-07-18.

作者简介: 李晓旺\* (1990-), 男, 博士, 工程师

(E-mail: 756988973@qq.com)

$$\ddot{\mathbf{X}} = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{X}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (0 \leq \gamma \leq 1) \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{X}}_i + 2\beta\ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (0 \leq \beta \leq 0.5) \quad (4)$$

$t_{i+1}$  时刻的速度和位移可以表示为

$$\dot{\mathbf{X}}_{i+1} = \dot{\mathbf{X}}_i + \Delta t \ddot{\mathbf{X}} \quad (5)$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{X}} \quad (6)$$

将式(3)代入式(5)可得

$$\dot{\mathbf{X}}_{i+1} = \dot{\mathbf{X}}_i + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{X}}_i + \gamma\Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (7)$$

将式(4)代入式(6)可得

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{X}}_i + \beta\Delta t^2 \ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (8)$$

对式(8)变形可得

$$\ddot{\mathbf{X}}_{i+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{X}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{X}}_i \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)可得

$$\dot{\mathbf{X}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{X}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t \ddot{\mathbf{X}}_i \quad (10)$$

将式(9,10)代入式(11)得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} \quad (11)$$

可获得  $t_{i+1}$  时刻的位移  $\mathbf{X}_{i+1}$  与  $t_i$  时刻的  $\ddot{\mathbf{X}}_i, \dot{\mathbf{X}}_i$  和  $\mathbf{X}_i$  之间的关系为

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{A}_0 \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{A}_d \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_v \dot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{A}_a \ddot{\mathbf{X}}_i \quad (12)$$

$$\text{式中 } \mathbf{A}_0 = \left(\mathbf{K} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_0 \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}\right)$$

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_0 \left[\frac{1}{\beta\Delta t} \mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{C}\right]$$

$$\mathbf{A}_a = \mathbf{A}_0 \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right)\mathbf{C}\right]$$

将式(12)代入式(9)可获得  $t_{i+1}$  时刻的加速度  $\ddot{\mathbf{X}}_{i+1}$  与  $t_i$  时刻的  $\ddot{\mathbf{X}}_i, \dot{\mathbf{X}}_i$  和  $\mathbf{X}_i$  之间的关系为

$$\ddot{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{C}_0 \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{C}_d \mathbf{X}_i + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{X}}_i \quad (13)$$

$$\text{式中 } \mathbf{C}_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{A}_0, \mathbf{C}_d = -\mathbf{C}_0 \mathbf{K}$$

$$\mathbf{C}_v = -\mathbf{C}_0 (\mathbf{C} + \Delta t \mathbf{K})$$

$$\mathbf{C}_a = \mathbf{C}_0 \left[ (\gamma - 1)\Delta t \mathbf{C} - \beta\Delta t^2 \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{K} \right]$$

将式(12)代入式(10)可获得  $t_{i+1}$  时刻的速度  $\dot{\mathbf{X}}_{i+1}$  与  $t_i$  时刻的  $\ddot{\mathbf{X}}_i, \dot{\mathbf{X}}_i$  和  $\mathbf{X}_i$  之间的关系为

$$\dot{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{B}_0 \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{B}_d \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_v \dot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{B}_a \ddot{\mathbf{X}}_i \quad (14)$$

$$\text{式中 } \mathbf{B}_0 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_d = -\mathbf{B}_0 \mathbf{K}$$

$$\mathbf{B}_v = \mathbf{B}_0 \left[ \left(\frac{\beta\Delta t}{\gamma} - \Delta t\right)\mathbf{K} + \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} \right]$$

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_0 \left[ \left(\frac{\beta\Delta t^2}{\gamma} - \frac{\Delta t^2}{2}\right)\mathbf{K} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\mathbf{M} \right]$$

将式(12~14)结合起来可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_a \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_v & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{C}_v & \mathbf{C}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \dot{\mathbf{X}}_i \\ \ddot{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

由于式(15)表示  $[\mathbf{X}_{i+1} \ \dot{\mathbf{X}}_{i+1} \ \ddot{\mathbf{X}}_{i+1}]^T$  和  $[\mathbf{X}_i \ \dot{\mathbf{X}}_i \ \ddot{\mathbf{X}}_i]^T$  之间的线性关系,则可以将等式右边的  $[\mathbf{X}_i \ \dot{\mathbf{X}}_i \ \ddot{\mathbf{X}}_i]^T$  递归到  $[\mathbf{X}_0 \ \dot{\mathbf{X}}_0 \ \ddot{\mathbf{X}}_0]^T$ , 从而获得  $[\mathbf{X}_{i+1} \ \dot{\mathbf{X}}_{i+1} \ \ddot{\mathbf{X}}_{i+1}]^T$  和  $[\mathbf{X}_0 \ \dot{\mathbf{X}}_0 \ \ddot{\mathbf{X}}_0]^T$  的线性关系。在零初始响应状态下,  $[\mathbf{X}_0 \ \dot{\mathbf{X}}_0 \ \ddot{\mathbf{X}}_0]^T$  为 0, 式(15)可以简化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{i-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_a \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_v & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{C}_v & \mathbf{C}_a \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \mathbf{F}_{i-j+1} \quad (16)$$

$$\text{令 } \mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_a \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_v & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{C}_v & \mathbf{C}_a \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(16)可以简化成振动离散方程为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_1) \\ \dot{\mathbf{X}}(t_1) \\ \ddot{\mathbf{X}}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(t_n) \\ \dot{\mathbf{X}}(t_n) \\ \ddot{\mathbf{X}}(t_n) \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{n-1} & \mathbf{H}_{n-2} & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t_1) \\ \mathbf{F}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_n) \end{bmatrix}$$

由于矩阵不适定的存在,在获得振动离散方程之后,采用 Tikhonov 正则化技术<sup>[15]</sup>重构式(18)的输入载荷  $\mathbf{F}$ 。设系统误差  $\mathbf{e}$  为

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (19)$$

引入罚函数的概念  $J$  为

$$J = (\mathbf{e}^H \mathbf{e}) + \lambda(\mathbf{F}^H \mathbf{F}) \quad (20)$$

当  $J$  对  $\mathbf{F}$  的一阶导数为 0, 误差  $\mathbf{e}$  达到最小值。此时激励  $\mathbf{F}$  可以表示为

$$\mathbf{F} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{Y} \quad (21)$$

式中  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\lambda$  为正则化参数,正则化参数的值借助 L 曲线法<sup>[16]</sup>计算获得。

## 2.2 矩阵摄动理论

设不确定性结构共含有  $k$  个不确定性参数,任意一个不确定性参数用  $b_j (j=1, 2, \dots, k)$  来描述,那么不确定性参数的集合向量  $\mathbf{b}$  可以表示为

$$\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_k) \quad (22)$$

基于区间分析思想,将不确定性参数  $b_j (j=1,$

2, …, k) 用区间参数的形式表示, 即

$$b_j \in b_j^I = [\underline{b}_j, \bar{b}_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (23)$$

式中  $b_j^I$  为不确定性参数  $b_j (j = 1, 2, \dots, k)$  所处的区间,  $\underline{b}_j$  和  $\bar{b}_j$  分别为区间  $b_j^I$  的下界和上界。

$b_j^I$  的区间中值  $b_j^c$  计算公式为:

$$b_j^c = 0.5(\underline{b}_j + \bar{b}_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (24)$$

$b_j^I$  的区间半径  $\Delta b_j$  计算公式为

$$\Delta b_j = 0.5(\bar{b}_j - \underline{b}_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (25)$$

参数  $b_j (j = 1, 2, \dots, k)$  的不确定性程度由不确定度  $u_j$  来表征。 $u_j$  越大, 参数不确定性越严重,  $u_j$  的计算公式为

$$u_j = \Delta b_j / b_j^c \times 100\% \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (26)$$

$b_j (j = 1, 2, \dots, k)$  的摄动部分  $\delta_j$  的范围为

$$\delta_j \in \delta_j^I = [-\Delta b_j, \Delta b_j] \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (27)$$

在上述公式基础上,  $b_j (j = 1, 2, \dots, k)$  可以表示为中值  $b_j^c$  和摄动部分  $\delta_j$  相加的最终形式, 即

$$b_j = b_j^c + \delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (28)$$

对于含有不确定性参数的振动系统来说, 结构特性矩阵  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  以及载荷向量  $\mathbf{F}(t)$  都不再是定常值, 而是关于不确定性参数集合  $\mathbf{b}$  的函数, 那么  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  和  $\mathbf{F}(t)$  可改写成  $\mathbf{M}(\mathbf{b}), \mathbf{C}(\mathbf{b}), \mathbf{K}(\mathbf{b})$  和  $\mathbf{F}(t, \mathbf{b})$ 。

在矩阵摄动理论的推导过程中, 首先需要计算结构特性矩阵和载荷向量的中值和一阶偏导。 $\mathbf{M}(\mathbf{b}), \mathbf{C}(\mathbf{b}), \mathbf{K}(\mathbf{b})$  和  $\mathbf{F}(t, \mathbf{b})$  在不确定性参数的中值  $\mathbf{b}^c$  处的值可表示为

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\mathbf{b}^c), \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}(\mathbf{b}^c) \quad (29, 30)$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\mathbf{b}^c), \mathbf{F}_0(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{b}^c) \quad (31, 32)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{b}), \mathbf{C}(\mathbf{b}), \mathbf{K}(\mathbf{b})$  和  $\mathbf{F}(t, \mathbf{b})$  关于任意一个不确定性参数  $b_j (j = 1, 2, \dots, k)$  的一阶偏导数在  $\mathbf{b}^c$  处的值可表示为

$$\mathbf{M}_{1,j} = \partial \mathbf{M}(\mathbf{b}^c) / (\partial b_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (33)$$

$$\mathbf{C}_{1,j} = \partial \mathbf{C}(\mathbf{b}^c) / (\partial b_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_{1,j} = \partial \mathbf{K}(\mathbf{b}^c) / (\partial b_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (35)$$

$$\mathbf{F}_{1,j}(t) = \partial \mathbf{F}(t, \mathbf{b}^c) / (\partial b_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (36)$$

在计算得到特征矩阵和载荷向量的中值和一阶偏导之后, 可以将  $\mathbf{M}(\mathbf{b}), \mathbf{C}(\mathbf{b}), \mathbf{K}(\mathbf{b})$  和  $\mathbf{F}(t, \mathbf{b})$  在  $\mathbf{b}^c$  的邻域处近似表示为一阶泰勒多项式展开式为

$$\mathbf{M}(\mathbf{b}) = \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{M}_{1,j} \delta_j \quad (37)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{b}) = \mathbf{C}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{C}_{1,j} \delta_j \quad (38)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{K}_{1,j} \delta_j \quad (39)$$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{b}) = \mathbf{F}_0(t) + \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_{1,j}(t) \delta_j \quad (40)$$

以上即为结构动力学的矩阵摄动公式, 将上述四个一阶泰勒多项式代入振动微分方程(1), 可得

$$(\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{X} - \mathbf{F}_0(t)) + \sum_{j=1}^k (\mathbf{M}_{1,j} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{1,j} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_{1,j} \mathbf{X} - \mathbf{F}_{1,j}(t)) \delta_j = 0 \quad (41)$$

由于所有不确定性参数之间互不相关, 所以式(41)成立的条件是每一个求和项均为 0, 即

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{X} = \mathbf{F}_0(t) \quad (42)$$

$$\mathbf{M}_{1,j} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{1,j} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_{1,j} \mathbf{X} = \mathbf{F}_{1,j}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (43)$$

式(42, 43)与振动微分方程式(1)具有相似的形式, 可借助 2.1 节的 Newmark-β 逐步积分的载荷幅值识别算法重构  $\mathbf{F}_0(t)$  和  $\mathbf{F}_{1,j}(t) (j = 1, 2, \dots, k)$  的时间历程。最后通过矩阵摄动公式将以上两部分相加减, 即可获得动态激励的上下边界为

$$\underline{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}_0(t) - \sum_{j=1}^k |\mathbf{F}_{1,j}(t)| \Delta b_j \quad (44)$$

$$\bar{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}_0(t) + \sum_{j=1}^k |\mathbf{F}_{1,j}(t)| \Delta b_j \quad (45)$$

式中  $\underline{\mathbf{F}}(t)$  为激励的下边界,  $\bar{\mathbf{F}}(t)$  为激励的上边界, 真实载包含在  $\underline{\mathbf{F}}(t)$  和  $\bar{\mathbf{F}}(t)$  之间。

### 3 数值算例分析

为证明本文载荷识别算法的可行性和有效性, 建立了 2 个含有不确定性参数的数值算例。每个算例中借助位移传感器测量节点的位移响应作为已知条件, 然后采用本文算法分别对 2 个算例的动态激励时间历程上下界进行重构, 并和传统的蒙特卡洛法进行对比。

#### 3.1 渐变式载荷识别

**算例 1** 建立一个悬臂梁模型如图 1 所示, 载荷施加在节点 8, 位移传感器分别位于节点 7 和节点 10。

悬臂梁各项参数分别为

(1) 不确定性参数。弹性模量  $E = [68, 72]$  GPa。

(2) 固定参数。泊松比 0.33, 密度  $2700 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 长宽高尺寸为 1000 mm × 50 mm × 20 mm。

对悬臂梁模型施加 1 个时间历程变化比较平缓的时变载荷  $F_1$ ,  $F_1$  的时间历程如图 4 所示。

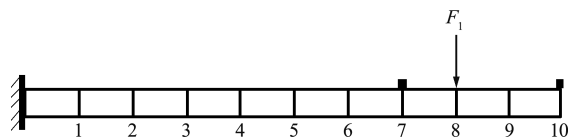


图 1 受渐变式载荷激励的悬臂梁模型

Fig. 1 Cantilever beam model with slowly changing excitation

在算法实施前需要进行两步前处理,第一步通过仿真方式获得节点动态响应,第二步在动态响应中加入5%的高斯白噪声。前处理完成后采用本文算法识别动态激励  $F_1$  的中值以及关于不确定性参数  $E$  的一阶偏导数,识别结果如图2和图3所示。

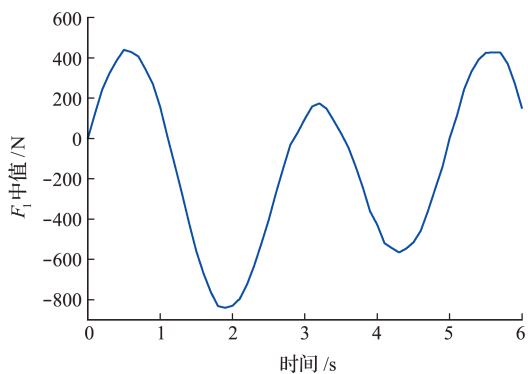


图2  $F_1$  中值识别结果

Fig. 2 Midpoint value identification result of  $F_1$

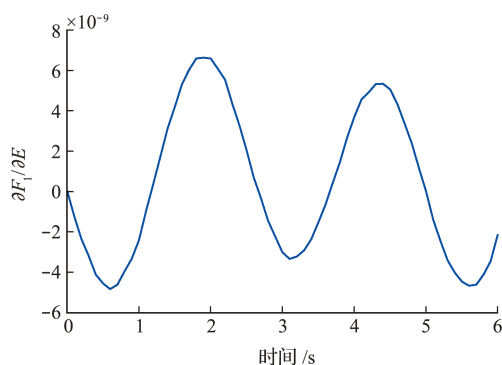


图3  $\partial F_1/\partial E$  的识别结果

Fig. 3 Identification result of  $\partial F_1/\partial E$

在获得  $F_1$  的中值以及关于  $E$  的一阶偏导数的前提下,根据式(44,45)计算  $F_1$  的上下边界。同时,蒙特卡洛法也反演  $F_1$  的上下边界作为对照。两种算法对  $F_1$  的识别结果如图4所示。同时,为了定量分析算法的精确度,选取了5个有代表性的时间点计算对应的识别误差,计算结果列入表1。

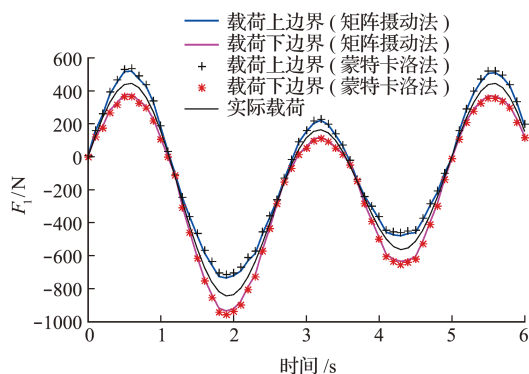


图4  $F_1$  识别结果

Fig. 4 Identification result of  $F_1$

表1 算例1中  $F_1$  的上下界偏移量

Tab. 1 Offset of identified load  $F_1$  in Example 1

时间/s	实际载荷/N	矩阵摄动		蒙特卡洛	
		上边界 下边界	误差 /%	上边界 下边界	误差 /%
0.5	437.33	518.41	18.54	532.98	21.87
		381.01	12.88	366.45	16.21
1.8	-818.63	-735.08	10.21	-716.97	12.42
		-931.42	13.78	-949.53	15.99
3.3	145.25	182.36	25.54	189.27	30.31
		116.09	20.07	107.63	25.89
4.5	-513.72	-434.19	15.48	-413.26	19.56
		-576.66	12.25	-597.59	16.33
5.6	444.81	514.01	15.56	527.74	18.64
		368.45	17.17	354.72	20.25

从图4可以看出,通过本文算法识别出的载荷上下边界可以准确地将  $F_1$  的实际值包含在内,体现了算法的有效性。同时,本文算法识别的载荷边界与蒙特卡洛法的识别结果吻合度较好,说明算法的识别精度较高。由于受到5%噪声的影响,识别的动态激励在一些时间点上有所波动,但总体时间历程保持平稳,显示出较强的抗噪性能。由表1可知,  $F_1$  重建边界的最大偏移量和最小偏移量分别为25.54%和10.21%。作为对照,蒙特卡洛法的识别误差比矩阵摄动法稍高但相差不大。

### 3.2 突变式载荷识别

**算例2** 建立一个桁架模型,载荷和位移传感器的位置如图5所示,其中3个位移传感器所测信号均为节点的竖直位移信号。

建立一个桁架模型,载荷和位移传感器的位置如图5所示,其中3个位移传感器所测信号均为节点的竖直位移信号。

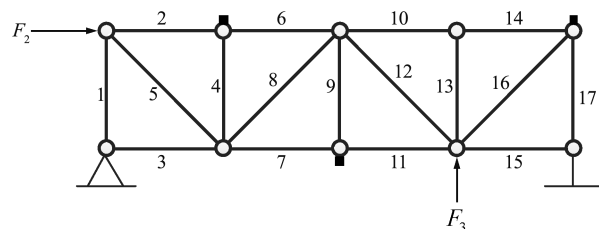


图5 受突变式载荷激励的桁架模型

Fig. 5 Truss model with rapidly changing excitation

桁架的各项参数如下。

(1) 不确定性参数。4号桁架的长度  $l = [599, 601]$  mm, 11号桁架的直径  $d = [19.5, 20.5]$  mm。

(2) 固定参数。弹性模量 200 GPa, 泊松比 0.3, 密度  $7800 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 除4号桁架以外的所有水平和垂直桁架的长度为 600 mm, 除11号桁架以外的所有桁架直径为 20 mm。

对悬臂梁模型施加2个时间历程变化比较迅速的突变式载荷  $F_2$  和  $F_3$ ,  $F_2$  和  $F_3$  的时间历程如图6所示。

前处理过程首先通过仿真方式获得节点动态响应,然后在响应信号中加入 10% 的高斯白噪声。前处理完成后采用本文算法反演动态激励  $F_2$  和

$F_3$  的中值以及关于不确定性参数  $l$  和  $d$  的一阶偏导数,识别结果如图 6~图 8 所示。

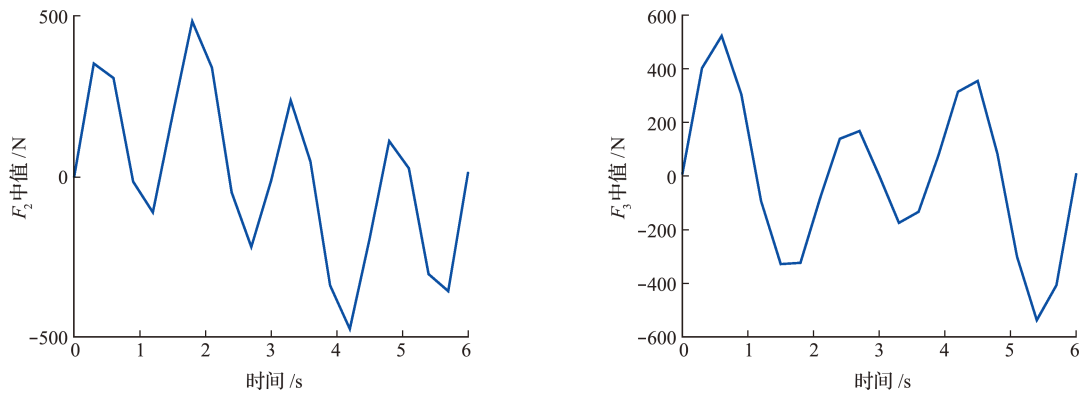


图 6  $F_2$  和  $F_3$  的中值识别结果  
Fig. 6 Midpoint value identification results of  $F_2$  and  $F_3$

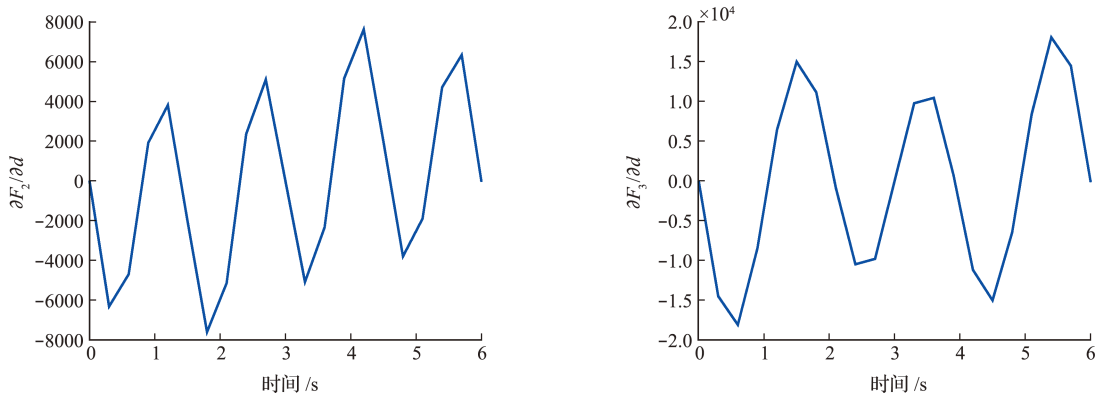


图 7  $\partial F_2/\partial d$  和  $\partial F_3/\partial d$  的识别结果  
Fig. 7 Identification results of  $\partial F_2/\partial d$  and  $\partial F_3/\partial d$

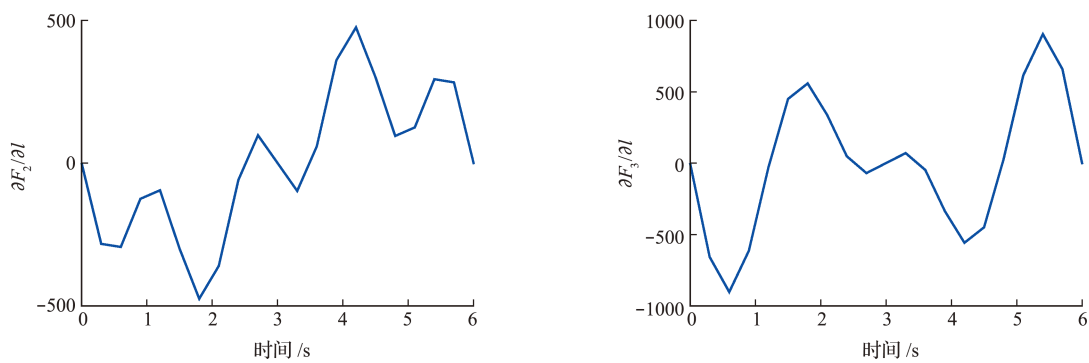


图 8  $\partial F_2/\partial l$  和  $\partial F_3/\partial l$  的识别结果  
Fig. 8 Identification results of  $\partial F_2/\partial l$  and  $\partial F_3/\partial l$

在求得  $F_2$  和  $F_3$  的中值以及二阶偏导数之后,分别采用本文算法推导的式(44,45)以及对照蒙特卡洛法反演  $F_2$  和  $F_3$  的上下边界,两种算法识别的  $F_2$  和  $F_3$  的上下边界如图 9 所示。同时,为了更加直观地分析算法精度,选取了 5 个时间点计算识别结果和真实值的相对误差,误差的计算结果列入表 2 和表 3。

算例 2 的突变式载荷在时间历程上比算例 1 的渐变式载荷更复杂,不确定性参数增多,噪声水

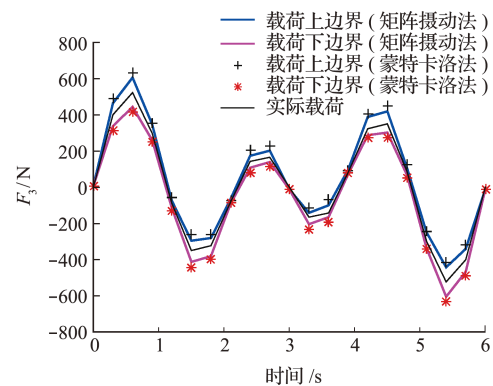
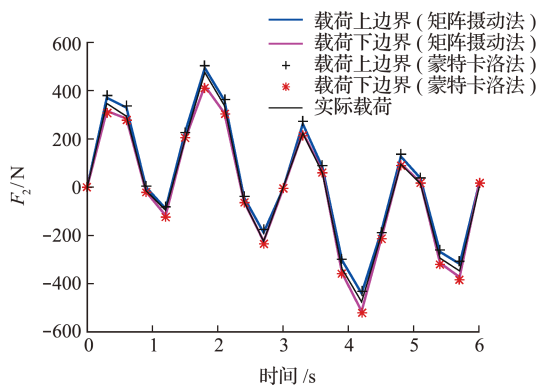
平也更高。从图 9 可以看出,识别的动态激励  $F_2$  和  $F_3$  的上下界仍保持鲁棒性并将实际载荷包络在内。同时,本文算法和蒙特卡洛法反演的载荷边界基本保持一致,体现了较高的识别精度。由表 2 和表 3 可知,  $F_2$  的最大和最小偏移量值分别为 23.09% 和 2.33%,  $F_3$  的最大和最小偏移量值分别为 34.29% 和 12.25%。总体来看,本文算法识别载荷边界的偏移量值在各时间点上接近于蒙特卡洛法的偏移量值,证明本文方法重建的激励上下界合理有效。

表2 算例2中  $F_2$  的上下界偏移量Tab.2 Offset of identified load  $F_2$  in Example 2

时间 /s	实际载荷 /N	矩阵摄动		蒙特卡洛	
		上边界 下边界	误差 /%	上边界 下边界	误差 /%
0.6	293.89	300.73	2.33	306.02	4.13
		254.88	13.27	249.59	15.07
1.2	-95.11	-80.59	15.26	-72.03	24.26
		-109.12	14.74	-117.68	23.74
3.6	58.78	72.35	23.09	77.64	32.09
		54.72	6.91	49.43	15.91
4.2	-475.53	-452.14	4.92	-443.58	6.72
		-526.32	10.68	-534.88	12.48
5.7	-347.12	-322.23	7.17	-311.75	10.19
		-377.15	8.65	-387.64	11.67

表3 算例2中  $F_3$  的上下界偏移量Tab.3 Offset of identified load  $F_3$  in Example 2

时间 /s	实际载荷 /N	矩阵摄动		蒙特卡洛	
		上边界 下边界	误差 /%	上边界 下边界	误差 /%
0.6	523.08	613.66	17.32	640.76	22.50
		451.03	13.78	423.92	18.96
1.5	-350	-293.81	16.06	-262.31	25.06
		-410.82	17.37	-442.28	26.37
3.6	-142.66	-93.75	34.29	-63.78	55.29
		-159.37	11.71	-189.33	32.71
4.5	350	422.27	20.65	453.77	29.65
		305.24	12.78	273.69	21.78
5.7	-400.71	-323.41	19.29	-299.68	25.21
		-449.80	12.25	-473.52	18.17

图9  $F_2$  和  $F_3$  的识别结果Fig.9 Identification results of  $F_2$  and  $F_3$ 

## 4 结 论

针对含不确定性参数结构的动载荷识别问题, 本文在时域内推导了一个将矩阵摄动理论和 Newmark- $\beta$  逐步积分法结合起来的综合算法, 该算法具有如下优势。

(1) 通过矩阵摄动理论将动载荷表示成中值和摄动量相加的一阶泰勒展开式, 避免了在不确定性参数的区间内大量采样计算, 显著提高了运算效率。

(2) 在计算载荷中值和摄动量时引入了 Newmark- $\beta$  逐步积分法并进行了改进, 改进之后的 Newmark- $\beta$  逐步积分法本质上是无条件稳定而在形式上是一个简单的线性离散方程, 从而在不影响求解精度的同时又省略了复杂的时间步迭代。

数值算例结果证明, 对于复杂程度不同的载荷以及不同的噪声水平, 该方法均可以高效准确地反演出载荷上下边界, 显示了较高的识别精度, 并具有较强的鲁棒性和抗噪性。

## 参考文献 (References):

[1] 姜金辉, 陈国平, 张 方. 多点平稳随机载荷识别方法研究[J]. 振动工程学报, 2009, **22**(2): 162-167. (JIANG Jin-hui, CHEN Guo-ping, ZHANG Fang.

Identification method of multi-point stationary random load [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2009, **22**(2):162-167. (in Chinese))

- [2] 智 浩, 文祥荣, 缪龙秀, 等. 动态载荷的频域识别方法[J]. 北方交通大学学报, 2000, **24**(4): 5-10. (ZHI Hao, WEN Xiang-rong, MIAO Long-xiu, et al. Dynamic loading identification in frequency domain[J]. *Journal of Northern Jiaotong University*, 2000, **24**(4):5-10. (in Chinese))
- [3] Lage Y E, Maia N M M, Neves M M, et al. Force identification using the concept of displacement transmissibility[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(7):1674-1686.
- [4] 徐 倩, 文祥荣, 孙守光. 结构动态载荷识别的精细逐步积分法[J]. 计算力学学报, 2002, **19**(1): 53-57. (XU Qian, WEN Xiang-rong, SUN Shou-guang. High precision direct integration scheme for structural dynamic load identification [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(1): 53-57. (in Chinese))
- [5] 马 超, 华宏星. 基于改进正则化方法的状态空间载荷识别技术[J]. 振动与冲击, 2015, **34**(11): 146-149. (MA Chao, HUA Hong-xing. State space load identification technique based on an improved regularized method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**

- (11):146-149. (in Chinese))
- [6] 张运良,林 泉,王永学,等. 一种改进的动态载荷时域识别方法[J]. 计算力学学报,2004,**21**(2):209-215. (ZHANG Yun-liang, LIN Gao, WANG Yong-xue, et al. An improved method of dynamic load identification in time domain [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, **21**(2): 209-215. (in Chinese))
- [7] Liu K, Law S S, Zhu X Q, et al. Explicit form of an implicit method for inverse force identification[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(3): 730-744.
- [8] Song X G, Zhang Y X, Liang D K. Load identification for a cantilever beam based on fiber Bragg grating sensors[J]. *Sensors*, 2017, **17**(8): 1733.
- [9] Xiao H Y, Zhao Z J, Chen B B, et al. Identification of harmonic load acting on an elastically supported thin plate linked with attachments[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2017, **19**(3): 1641-1652.
- [10] Luo Z, Zhao X Y, Zhu Y P, et al. Determination method of the structure size interval of dynamic similar models for predicting vibration characteristics of the isotropic sandwich plates[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014, **16**: 608-622.
- [11] 陈志国,邓忠民,毕司峰. 基于 Monte Carlo 法的结构动力学模型确认[J]. 振动与冲击, 2013, **32**(16): 76-81. (CHEN Zhi-guo, DENG Zhong-min, BI Si-feng. Structural dynamics model validation based on Monte Carlo method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, **32**(16): 76-81. (in Chinese))
- [12] 韩 旭,刘 杰,姜 潮. 不确定性结构的动态载荷识别[A]. 中国力学学会学术大会 2009 论文摘要集[C]. 北京:中国力学学会,2009. (HAN Xu, LIU Jie, JIANG Chao. Dynamic load identification of uncertain structure[A]. Abstract of the 2009 Proceedings of the Chinese Society of Mechanics [C]. Beijing: Chinese Society of Mechanics, 2009. (in Chinese))
- [13] 孙兴盛,刘 杰,丁 飞,等. 基于矩阵摄动的随机结构动态载荷识别技术[J]. 机械工程学报, 2014, **50**(13): 148-156. (SUN Xing-sheng, LIU Jie, DING Fei, et al. Identification method of dynamic loads for stochastic structures based on matrix perturbation theory [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, **50**(13): 148-156. (in Chinese))
- [14] Pan D G, Chen G D, Wang Z C. Suboptimal Rayleigh damping coefficients in seismic analysis of viscously-damped structures[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2014, **13**(4): 653-670.
- [15] Choi H G, Thite A N, Thompson D J. A threshold for the use of Tikhonov regularization in inverse force determination[J]. *Applied Acoustics*, 2006, **67**(7): 700-719.
- [16] Hansen P C, O'Leary D P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993, **14**(6): 1487-1503.

## A method combining matrix perturbation and Newmark- $\beta$ stepwise integration for load identification of uncertain structure

LI Xiao-wang\*, HUANG Ke, WEI Guang-wei, YANG Xiang-fei, HUANG Lei  
(Beijing Institute of Mechanical Equipment, Beijing 100854, China)

**Abstract:** In order to reconstruct the upper and lower bounds of dynamic excitation applied on the uncertain structure, a method combining matrix perturbation and Newmark- $\beta$  stepwise integration is established. Firstly, matrix perturbation theory is used to express dynamic load in a first-order Taylor polynomial expansion. Then Newmark- $\beta$  stepwise integration algorithm is introduced to decouple differential equation of structural dynamics in time domain. A linear discrete equation combining structural response, structural characteristics and dynamic load is set up. As a result the midpoint and first-order perturbation of dynamic load are calculated. Numerical examples indicate that the proposed method is able to identify force bounds at high speed and accuracy. Meanwhile, this method possesses strong noise resistance.

**Key words:** matrix perturbation; Newmark- $\beta$ ; uncertain structure; time domain; load identification

引用本文/Cite this paper:

李晓旺,黄 科,魏广威,等. 矩阵摄动和 Newmark- $\beta$  逐步积分相结合的不确定性结构载荷识别[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(5): 677-683.  
LI Xiao-wang, HUANG Ke, WEI Guang-wei, et al. A method combining matrix perturbation and Newmark- $\beta$  stepwise integration for load identification of uncertain structure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(5): 677-683.