

DOI: 10.7511/jslx20210425002

# 变截面悬链线无铰拱应变影响线的解析解

周宇<sup>\*1,2</sup>, 许成超<sup>1,2</sup>, 赵青<sup>1</sup>, 王雪忠<sup>1</sup>

(1. 安徽建筑大学 土木工程学院, 合肥 230601; 2. 安徽省 BIM 工程中心, 合肥 230601)

**摘要:** 针对变截面悬链线无铰拱应变影响线尚无解析解的现状, 通过弹性中心法对其力法方程进行简化, 利用 Ritter 截面变化规律简化变截面悬链线无铰拱的曲线积分, 从而推导出变截面悬链线无铰拱应变影响线的闭合解表达式, 再将解析结果与有限元分析结果进行对比研究, 并对轴力参数展开对比分析。研究结果表明, 本文推导得到变截面悬链线无铰拱应变影响线的解析解, 数值解析解同有限元结果间最大相对误差小于 2%, 其轴力影响随矢跨比和测点位置变化而变化, 本文公式具有较高的工程精度和计算分析参考价值。

**关键词:** 无铰拱; 变截面悬链线; 应变影响线; 弹性中心法; 实用解析解

中图分类号: O242.2

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2022)05-0551-06

## 1 引言

悬链线拱轴线型作为一类典型的曲线族<sup>[1,2]</sup>, 在中小跨径实腹式无铰拱和大跨空腹式无铰拱中有着广泛的应用<sup>[3-7]</sup>, 为实现更合理的受载, 工程中多采用变截面拱结构作为板拱桥和系杆拱桥的拱肋截面进行设计<sup>[8]</sup>。影响线作为桥梁结构的固有静力特征, 可以全面反映其截面刚度特性, 是桥梁结构设计的重要参数, 且近年在桥梁损伤计算领域也逐渐成为热点<sup>[9-12]</sup>, 其应用前景广阔<sup>[10,11]</sup>。但由于超静定拱桥结构影响线的求解过程复杂, 仍未见变截面悬链线无铰拱应变影响线解析解研究的相关报道。

有关等截面的悬链线和抛物线拱的挠度影响线解析, 文献[1-13]采用悬索线拟合的方式, 简化了拱轴线的积分路径; 对于变截面悬链线拱, 郭临义<sup>[14]</sup>基于 Ritter 公式规律变化的截面形式简化了曲线积分倾角余弦系数  $\cos\varphi$ , 使得到内力解析显示表达成为可能, 但相关研究未涉及竖向移动荷载下的影响线解析解, 变截面悬链线拱结构影响线分析研究仍有较大潜力。

基于 Ritter 截面变化公式简化悬链线曲线积分, 结合弹性中心<sup>[15]</sup>简化体系下的力法方程, 推导

了变截面悬链线无铰拱应变影响线的显式解, 针对拱轴力随矢跨比变化的特性展开研究, 并通过四座不同矢跨比下的悬链线无铰拱结构多个截面的有限元校验了相关结论, 研究结果可用于工程计算与模型分析借鉴。

## 2 应变影响线解析解

### 2.1 计算思路

变截面抛物线无铰拱的基本结构如图 1 所示。

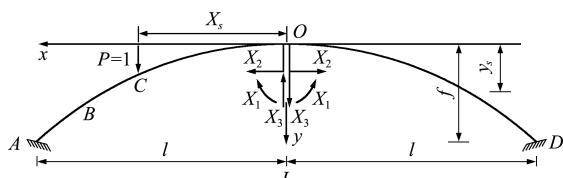


图 1 拱轴基本体系  
Fig. 1 Arch shaft basic system

拱轴几何量表达式与悬链线拱轴方程为

$$y = f(\operatorname{ch} kx/l - 1)/(m-1) \quad (1)$$

$$k = \ln(m^2 + \sqrt{m^2 - 1}) \quad (2)$$

式中  $f$  为拱肋矢高,  $m$  为拱轴系数,  $l$  为拱轴半跨径。截面按 Ritter 公式设置拱轴曲线,

$$I = I_o / [(1 - x/l + nx/l)\cos\varphi] \quad (3)$$

$$\cos\varphi = \left\{ 1 + [k^2 f^2 \operatorname{sh}^2(kx/l) / (m-1)^2 l^2] \right\}^{-1/2} \quad (4)$$

$$A = A_o \left\{ [1 - (1 - n)x/l]\cos\varphi \right\}^{-1/3} \quad (5)$$

式中  $I_o$  和  $A_o$  分别为拱顶惯性矩和截面面积,  $n$  为拱肋截面变化系数,  $\varphi$  为拱截面水平夹角。

利用力法将无铰拱分成左右对称的悬臂拱, 如图 1 所示, 跨中冗力为  $x_1$ ,  $x_2$  和  $x_3$ ; 采用弹性中心法简化力法方程, 设点 C 移动力坐标为  $x_s$ 。

收稿日期: 2021-04-25; 修改稿收到日期: 2021-06-02.

基金项目: 国家自然科学基金(51868045, 51908266); 安徽省高校省级自然科学研究重点项目(KJ2019A0746); 安徽省自然科学基金青年项目(2008085QE247); 安徽省高校自然科学研究项目(KJ2020JD05); 安徽建筑大学博士启动基金(2019QDZ08)资助项目。

作者简介: 周宇\*(1989-), 男, 博士, 讲师  
(E-mail: yuzhou923@outlook.com)

## 2.2 冗力及其影响线计算

冗力影响线求解是求解应变影响线的基础,冗

力作用下截面内力及影响线列入表 1 和表 2。

表 1 冗力作用下结构基本内力  
Tab. 1 Internal forces under the effect of redundant forces

内力	冗力						单位移动荷载	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\pm x$	$M_p$	$x \leq x_s$	$x > x_s$	
弯矩	$\bar{M}_1$	1	$\bar{M}_2$	$y - y_s$	$\bar{M}_3$	$\pm x$	$M_p$	$-(x - x_s)$
轴力	$\bar{N}_1$		$\bar{N}_2$	$\cos \varphi$	$\bar{N}_3$	$\mp \sin \varphi$	$N_p$	0
剪力	$\bar{Q}_1$	0	$\bar{Q}_2$	$\pm \sin \varphi$	$\bar{Q}_3$	$\cos \varphi$	$Q_p$	$\mp \cos \varphi$

注: 当计算截面在左半拱时,采用上面符号,当取右半拱时,采用下面符号。

表 2 冗力影响线计算  
Tab. 2 Redundancy impact line calculations

参数	意义	基本力学表达式	本文实用解析解
$y_s$	弹性中心	$\int_S y \, ds / \int_S \, ds$	$y_s = 2f/k^2(m-1)(n+1)[nk(m^2-1)^{1/2} + (1-n)(m-1) - k^2(1+n)/2]$
$\delta_{11}$		$\int_S (\bar{M}_1^2/EI) \, ds$	$(1+n)l/EI_o$ $[2lf^2/EI_o(m-1)]\{(m-2)/2(m-1) - y_s/f\}(m^2-1)^{1/2}/k +$
$\delta_{22}$	无铰拱常变位	$\int_S (\bar{M}_2^2/EI) \, ds + \int_S (\bar{N}_2^2/EA) \, ds$	$[2(m-1)]^{-1} - (1-n)\{(m-2)/2(m-1) - y_s/f\}(m^2-1)^{1/2}/k +$ $[4(m-1)]^{-1} - [(m-1)/k^2][(m-3)/4(m-1) - y_s/f]\} +$ $3l\cos\varphi^{4/3}(1-n^{4/3})/2EA_o(1-n)$
$\delta_{33}$		$\int_S (\bar{M}_3^2/EI) \, ds$	$(1+3n)l^3/6EI_o$
$\Delta_{1P}$		$\int_S (M_1 M_p/EI) \, ds$	$-(l^2/6EI_o)[3(1-x_s/l)^2 - (1-n)(2-3x_s/l+x_s^3/l^3)]$ $- [fl^2/(m-1)EI_o]\{(x_s/kl)[\text{sh}(kx_s/l) - \text{sh}k] + k^{-2}[1+(1-n)x_s/l] \times$ $[\text{ksh}k - (kx_s/l)\text{sh}(kx_s/l) - \text{ch}k + \text{ch}(kx_s/l)] + [(n-1)/k^3] \times$ $\{(k^2+2)\text{sh}k - (k^2x_s^2/l^2+2)\text{sh}(kx_s/l) - 2k[\text{ch}k - (x_s/l)\text{ch}(kx_s/l)]\}\} +$ $(l^2/6EI_o)[f/(m-1) + y_s][3(1-x_s/l)^2 - (1-n)(2-3x_s/l+x_s^3/l^3)]$
$\Delta_{2P}$	无铰拱单位力载变位	$\int_S (M_2 M_p/EI) \, ds$	$-(l^3/12EI_o)[2(2-3x_s/l+x_s^3/l^3) - (1-n)(3-4x_s/l+x_s^4/l^4)]$
$\Delta_{3P}$		$\int_S (M_3 M_p/EI) \, ds$	$-l[3(1-x_s/l)^2 - (1-n)(2-3x_s/l+x_s^3/l^3)]/6(n+1)$ $\left[ fl^2/(m-1)EI_o \right] \left\{ (x_s/kl)[\text{sh}(kx_s/l) - \text{sh}k] + k^{-2}[1+(1-n)x_s/l] \times \right.$ $\left. [\text{ksh}k - (kx_s/l)\text{sh}(kx_s/l) - \text{ch}k + \text{ch}(kx_s/l)] + [(n-1)/k^3] \times \right.$ $\left. \{(k^2+2)\text{sh}k - (k^2x_s^2/l^2+2)\text{sh}(kx_s/l) - 2k[\text{ch}k - (x_s/l)\text{ch}(kx_s/l)]\} \right\} -$ $(l^2/6EI_o)[f/(m-1) + y_s][3(1-x_s/l)^2 - (1-n)(2-3x_s/l+x_s^3/l^3)]\} /$ $\left\{ [2lf^2/EI_o(m-1)]\{(m-2)/2(m-1) - y_s/f\}(m^2-1)^{1/2}/k + \right.$ $\left. [2(m-1)]^{-1} - (1-n)\{(m-2)/2(m-1) - y_s/f\}(m^2-1)^{1/2}/k + \right.$ $\left. [4(m-1)]^{-1} - [(m-1)/k^2][(m-3)/4(m-1) - y_s/f]\} + \right.$ $\left. 3l\cos\varphi^{4/3}(1-n^{4/3})/2EA_o(1-n)\right\}$
$x_1$		$-\int_S (M_1 M_p/EI) \, ds / \int_S (\bar{M}_1^2/EI) \, ds$	$\left[ (4-6x_s/l+2x_s^3/l^3) - (1-n)(3-4x_s/l+x_s^4/l^4) \right] / 2(1+3n)$
$x_2$	冗力	$-\int_S (M_2 M_p/EI) \, ds / \int_S (\bar{M}_2^2/EI) \, ds$	$W_{zB} = bh_B^2/6, A_B = bh_B \quad (7,8)$
$x_3$		$-\int_S (M_3 M_p/EI) \, ds / \int_S (\bar{M}_3^2/EI) \, ds$	式中 $\epsilon_B$ 为 B 截面应变, $M_B$ 为 B 截面弯矩, $W_{zB}$ 为 B 截面抗弯截面系数, $E$ 为拱肋材料弹性模量, $N_B$ 为 B 截面轴力, $A_B$ 为 B 截面面积, $b$ 为拱截面宽(等宽变高截面), $h_B$ 为 B 截面高度。

注: 当移动荷载在右半拱时即图中 x 轴负半轴时,将截变位  $\Delta_{1P}, \Delta_{2P}$  和  $\Delta_{3P}$  的  $x_s$  替换为  $-x_s$ ,再按步骤运算。

## 2.3 应变影响线的计算

根据图 2,对 O 处的冗力和 C 处的移动动力在截面 B 处的作用列平衡方程,求截面 B 的应变影响线,

$$\epsilon_B = \epsilon_{MB} + \epsilon_{NB} = M_B/W_{zB}E + N_B/EA_B \quad (6)$$

$$W_{zB} = bh_B^2/6, A_B = bh_B \quad (7,8)$$

式中  $\epsilon_B$  为 B 截面应变,  $M_B$  为 B 截面弯矩,  $W_{zB}$  为 B 截面抗弯截面系数,  $E$  为拱肋材料弹性模量,  $N_B$  为 B 截面轴力,  $A_B$  为 B 截面面积,  $b$  为拱截面宽(等宽变高截面),  $h_B$  为 B 截面高度。

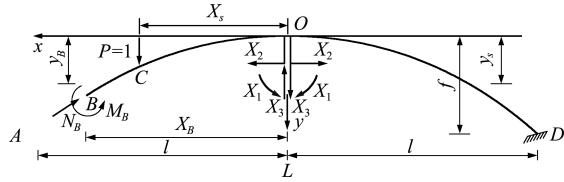


图 2 B 截面内力

Fig. 2 Section B internal force

根据移动力位置,  $M_B$  和  $N_B$  可分以下情况,

$$M_B = \begin{cases} x_1 + (y_B - y_s)x_2 + x_B x_3 & (x_B < x_s < l) \\ x_1 + (y_B - y_s)x_2 + x_B x_3 - (x_B - x_s) & (0 < x_s < x_B) \\ x_1 + (y_B - y_s)x_2 - x_B x_3 & (-l < x_s < 0) \end{cases} \quad (9)$$

$$N_B = \begin{cases} \cos \varphi x_2 - \sin \varphi x_3 & (x_B < x_s < l) \\ \cos \varphi x_2 - \sin \varphi x_3 + \sin \varphi & (0 < x_s < x_B) \\ \cos \varphi x_2 + \sin \varphi x_3 & (-l < x_s < 0) \end{cases} \quad (10)$$

根据式(6~8), 得截面 B 处应变影响线,

$$\epsilon_B = \begin{cases} \frac{6x_1 + 6(y_B - y_s)x_2 + 6x_B x_3}{Ebh_B^2} + \frac{\cos \varphi x_2 - \sin \varphi x_3}{Ebh_B} & (x_B < x_s < l) \\ \frac{6x_1 + 6(y_B - y_s)x_2 + 6x_B x_3 - 6(x_B - x_s)}{Ebh_B^2} + \frac{\cos \varphi x_2 - \sin \varphi x_3 + \sin \varphi}{Ebh_B} & (0 < x_s < x_B) \\ \frac{6x_1 + 6(y_B - y_s)x_2 - 6x_B x_3}{Ebh_B^2} + \frac{\cos \varphi x_2 + \sin \varphi x_3}{Ebh_B} & (-l < x_s < 0) \end{cases}$$

表 3 算例典型截面数值对比表  
Tab. 3 A values comparison of cases in typical sections

荷载作用位置	截面应变			l/2			l/4		
		本文公式/m	有限元/m	相对误差/%	本文公式/m	有限元/m	相对误差/%		
算例 1 (矢跨比 1/7)	-l/4	-8.753E-08	-8.643E-08	1.257	-1.056E-07	-1.059E-07	0.210		
	考虑轴力	l/2	3.000E-07	3.013E-07	0.421	-1.706E-07	-1.705E-07	0.044	
	l/4	-8.753E-08	-8.643E-08	1.257	2.884E-07	2.878E-07	0.189		
	-l/4	-9.558E-08	-8.643E-08	9.569	-1.067E-07	-1.059E-07	0.817		
	未考虑轴力	l/2	2.845E-08	3.013E-07	5.901	-1.727E-07	-1.705E-07	1.267	
	l/4	-9.558E-08	-8.643E-08	9.569	2.873E-07	2.878E-07	0.198		
算例 2 (矢跨比 1/5)	-l/4	-8.482E-08	-8.442E-08	0.480	-9.871E-08	-9.843E-08	0.289		
	考虑轴力	l/2	3.053E-07	3.063E-07	0.320	-1.579E-07	-1.585E-07	0.342	
	l/4	-8.482E-08	-8.442E-08	0.480	2.882E-07	2.877E-07	0.152		
	-l/4	-8.870E-08	-8.442E-08	4.826	-9.916E-08	-9.843E-08	0.738		
	未考虑轴力	l/2	2.978E-07	3.063E-07	2.838	-1.588E-07	-1.585E-07	0.203	
	l/4	-8.870E-08	-8.442E-08	4.826	2.877E-07	2.877E-07	0.004		
算例 3 (矢跨比 1/3)	-l/4	-8.061E-08	-8.044E-08	0.208	-8.762E-08	-8.836E-08	0.845		
	考虑轴力	l/2	3.134E-07	3.132E-07	0.083	-1.396E-07	-1.399E-07	0.219	
	l/4	-8.061E-08	-8.070E-08	0.119	2.759E-07	2.758E-07	0.064		
	-l/4	-8.182E-08	-8.044E-08	1.686	-8.772E-08	-8.836E-08	0.723		
	未考虑轴力	l/2	3.111E-07	3.132E-07	0.668	-1.398E-07	-1.399E-07	0.072	
	l/4	-8.182E-08	-8.070E-08	1.364	2.758E-07	2.758E-07	0.025		
算例 4 (矢跨比 1/2)	-l/4	-7.792E-08	-7.845E-08	0.680	-7.726E-08	-7.787E-08	0.794		
	考虑轴力	l/2	3.186E-07	3.195E-07	0.276	-1.232E-07	-1.235E-07	0.226	
	l/4	-7.792E-08	-7.898E-08	1.356	2.529E-07	2.527E-07	0.063		
	-l/4	-7.838E-08	-7.845E-08	0.090	-7.729E-08	-7.787E-08	0.752		
	未考虑轴力	l/2	3.177E-07	3.195E-07	0.556	-1.233E-07	-1.235E-07	0.176	
	l/4	-7.838E-08	-7.898E-08	0.762	2.529E-07	2.527E-07	0.051		

式中  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的展开形式已列入表 2, 因篇幅限制, 不再赘述。

### 3 算例分析

为验证应变影响线的解析准确性, 以四个变截面悬链线无铰拱为例, 通过 MIDAS/Civil 建立有限元模型, 对比推导的应变影响线计算结果, 并比较解析解与有限元解的相对误差。四座拱跨径均为 50.934 m, 矢跨比分别为 1/2, 1/3, 1/5 和 1/7, 如图 3 所示, 拱肋截面宽 1 m, 跨中拱截面高 1.1 m, 截面高按 Ritter 公式变化, 材料弹性模量为 3.45E+07 kN/m<sup>2</sup>, 拱轴系数  $m$  为 1.988, 拱厚变化系数  $n$  为 0.4, 本文公式解析和有限元计算的  $l/2$  和  $l/4$  截面应变影响线如图 4 和图 5 所示, 典型截面数值结果列入表 3。

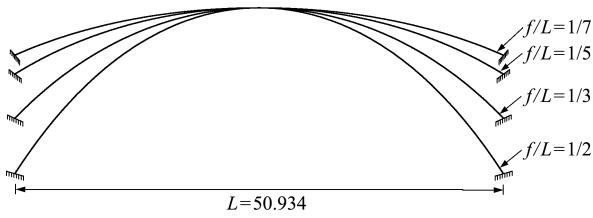


Fig. 3 Four kinds of sagittal span ratio arch axes

由表 3 及图 4 和图 5 表明, 对不同矢跨比的拱轴, 当考虑轴力时, 算例中四种变截面悬链线无铰拱应变影响线的解析解与有限元计算结果偏差均

小于2%。然而在未考虑轴力时,1/2和1/3矢跨比的变截面悬链线无铰拱应变影响线解析解的计算偏差尚能控制在2%以内,但1/5和1/7矢跨比的l/2测点应变影响线解析计算偏差较大,在2%

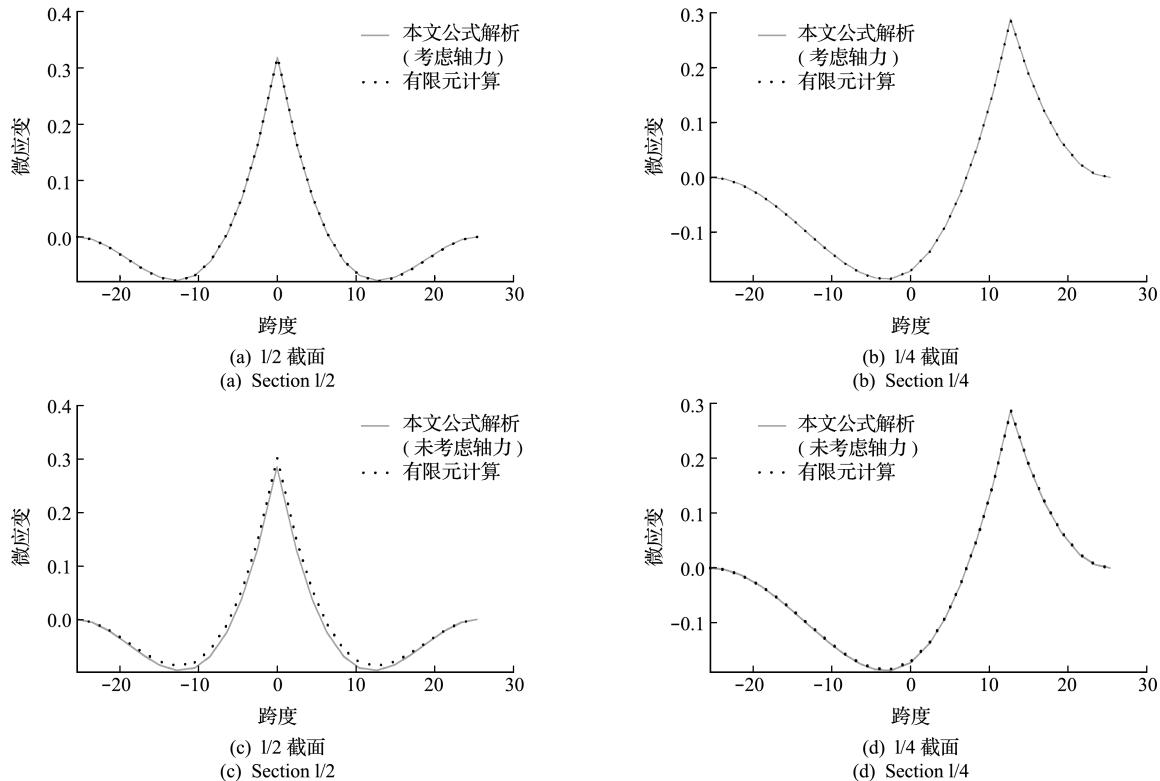


图4 本文公式法与有限元法计算结果对比(算例1)

Fig. 4 Comparison of the calculation results between formula method and finite element method (Example 1)

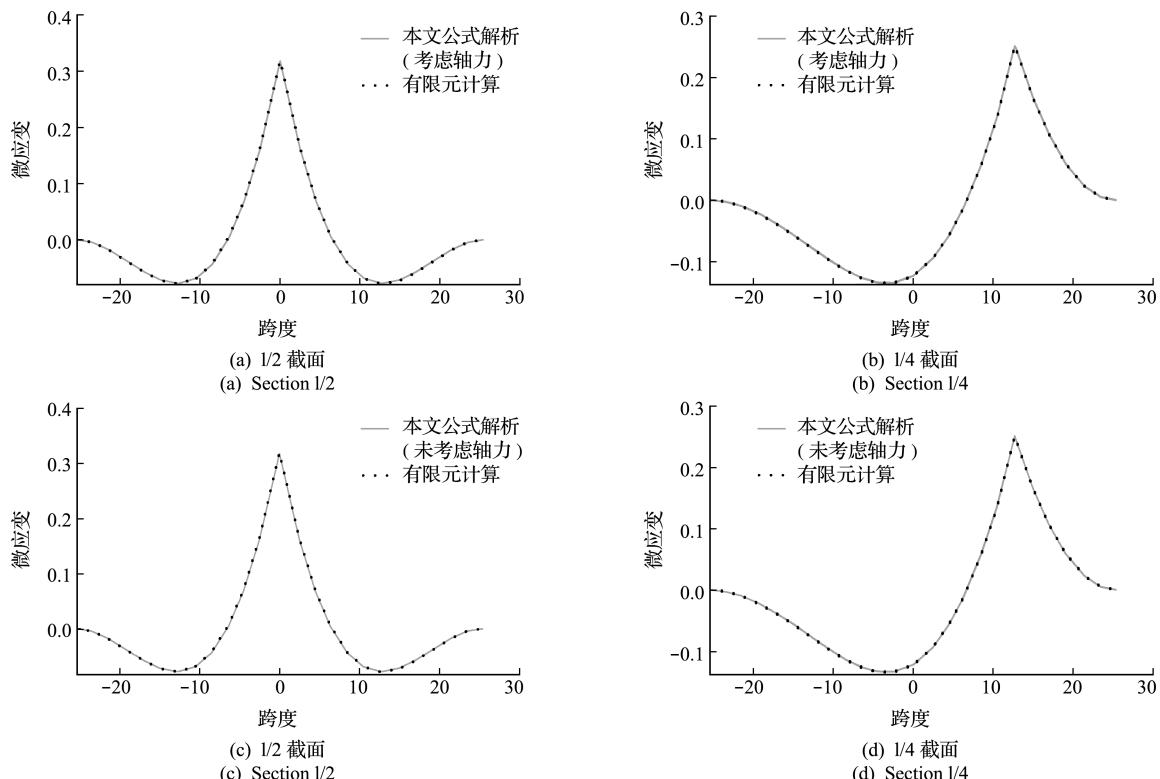


图5 本文公式法与有限元法计算结果对比(算例4)

Fig. 5 Comparison of the calculation results between formula method and finite element method (Example 4)

以上,且最大计算偏差大于9%。针对同一矢跨比,l/4测点比l/2测点处的影响线解析偏差普遍较小,同时l/4测点较l/2测点受轴力的影响更小,在未考虑轴力时的计算偏差也均能控制在2%以内。

## 4 结 论

(1) 在变截面遵循 Ritter 公式规律的基础上,推导得到变截面悬链线无铰拱应变影响线解析解。本文公式解析与有限元计算结果最大偏差小于 2%,符合工程精度要求,可作为任意拱轴系数及矢跨比下悬链线变截面无铰拱应变影响线计算依据。

(2) 研究同一拱轴系数下不同矢跨比的变截面悬链线无铰拱应变影响线,对是否考虑轴力的计算结果进行对比,发现随矢跨比愈小,轴力对结果的影响愈大,计算偏差也就越大,对于矢跨比 1/7 的坦拱,考虑轴力最大偏差小于 2%,未考虑轴力的最大偏差大于 9%。

(3) 同一矢跨比拱,测点位置不同,轴力影响程度也不同,  $l/4$  跨处轴力对其鲜有影响,  $l/2$  跨处轴力对其影响程度较大。

(4) 悬链线无铰拱的变截面并非都按 Ritter 规律变化,其他截面高度变化规律对悬链线无铰拱应变影响线的影响,有待进一步研究。

## 参 考 文 献 (References):

- [1] 胡常福,陆小雨,甘慧慧,等.基于近似积分的悬链线拱实用解析解[J].中南大学学报(自然科学版),2015,46(3):1058-1065.(HU Chang-fu,LU Xiao-yu,GAN Hui-hui,et al. Practical analytical solution of catenary arch based on approximate integration method[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*,2015,46(3):1058-1065. (in Chinese))
- [2] 刘爱荣,汪荷玲,禹奇才,等.斜靠式拱桥结构侧倾失稳分析的 Ritz 法[J].计算力学学报,2013,30(1):81-87.(LIU Ai-rong,WANG He-ling,YU Qi-cai,et al. Ritz method of the analysis of lateral buckling for leaning-type arch bridge[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2013,30(1):81-87. (in Chinese))
- [3] 陈善勤.悬链线空腹式双曲拱桥的空间效应分析[D].重庆交通大学,2008.(CHEN Shan-qin. Spatial Effect Analysis of Catenary Open-Spandrel Double-Curved Arch Bridge[D]. Chongqing Jiaotong University,2008. (in Chinese))
- [4] Nikolić D. Catenary arch of finite thickness as the optimal arch shape[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*,2019,60(5):1957-1966.
- [5] 廖碧海,陈旭勇,王国鼎.悬链线拱上实腹段面积及重心计算实用方法[J].中南公路工程,2007,32(2):114-116,120.( LIAO Bi-hai,CHEN Xu-yong,WANG Guo-ding. Practical computaion method of section area and gravity center of solid-web section on Catenary arch [J]. *Journal of Central South Highway Engineering*,2007,32(2):114-116,120. (in Chinese))
- [6] Kang S B,Wang S,Gao S,Analytical study on one-way reinforced concrete beam-slab sub-structures under compressive arch action and catenary action[J]. *Engineering Structures*,2020,206:110032.
- [7] 刘爱荣,汪荷玲,禹奇才,等.悬链线斜靠式拱肋系侧倾失稳临界荷载[J].工程力学,2013,30(10):162-170.(LIU Ai-rong,WANG He-ling,YU Qi-cai,et al. Lateral buckling critical load of leaning-type arch ribs system with catenary curve arch aris[J]. *Engineering Mechanics*,2013,30(10):162-170. (in Chinese))
- [8] 向天宇,郑建军,周欣竹.变截面圆拱强迫振动的传递矩阵算法[J].土木工程学报,2000,33(1):46-49,68.(XIANG Tian-yu,ZHENG Jian-jun,ZHOU Xin-zhu. Transfer matrix algorithm for forced vibration of circular arches with variable cross-section [J]. *China Civil Engineering Journal*,2000,33(1):46-49,68. (in Chinese))
- [9] Zhou Y,Di S K,Xiang C S,et al. Damage identification in simply supported bridge based on rotational-angle influence lines method [J]. *Transactions of Tianjin University*,2018,24(6):587-601.
- [10] Zhou Y,Di S K,Xiang C S,et al. Damage detection for simply supported bridge with bending fuzzy stiffness consideration [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University (Science)*,2018,23(2):308-319.
- [11] 周宇,狄生奎,项长生,等.基于弹性约束支承梁转角影响线的梁结构损伤诊断[J].浙江大学学报(工学版),2020,54(5):879-888.(ZHOU Yu,DI Sheng-kui, XIANG Chang-sheng, et al. Beam structure damage detection based on rotational-angleinfluence-lines of elastic-constrained-support beam[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*,2020,54(5):879-888. (in Chinese))
- [12] 杜永峰,刘云帅,王晓琴.基于挠度差值影响线曲率的简支梁桥损伤识别[J].桥梁建设,2009,39(4):80-83.(DU Yong-feng,LIU Yun-shuai,WANG Xiao-qin. Damage identification of simply-supported beam bridges based on influence line curvature of deflection differential values[J]. *Bridge Construction*,2009,39(4):80-83. (in Chinese))
- [13] 杨雨厚,刘来君,孙维刚,等.等截面抛物线无铰拱挠度影响线实用解析解[J].计算力学学报,2017,34(4):480-486.(YANG Yu-hou, LIU Lai-jun, SUN Wei-gang,et al. Practical analytical solution of deflection influence line of clamped parabolic arch bridges

- with uniform section [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(4): 480-486. (in Chinese))
- [14] 郭临义. 正拱斜置变截面悬链线坡拱桥的受力分析 [J]. 西安公路交通大学学报, 1999, **19**(2): 36-40. (GUO Lin-yi. Inner force analysis of right catenary arch with variable cross section on slope [J]. *Journal of Xi'an Highway and Jiaotong University*, 1999, **19**(2): 36-40. (in Chinese))
- [15] 赵守江, 戴君武. 故宫西华门砖拱券结构分析 [J]. 建筑结构, 2016, **46**(15): 98-101. (ZHAO Shou-jiang, DAI Jun-wu. Structural analysis of the brick arches of Xihua Men in the Forbidden City [J]. *Building Structure*, 2016, **46**(15): 98-101. (in Chinese))

## Practical analytical expression to strain influence line of varying cross section catenary fixed arch

ZHOU Yu<sup>\*1,2</sup>, XU Cheng-chao<sup>1,2</sup>, ZHAO Qing<sup>1</sup>, WANG Xue-zhong<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China;

2. BIM Engineering Center of Anhui Province, Hefei 230601, China)

**Abstract:** In view of the present situation that there is no analytical solution to the strain influence line of the variable-section catenary hingeless arch, this paper simplified the force method equation by using the elastic center method, simplified the curvilinear integral of the variable-section catenary hingeless arch by using the Ritter cross-section variation law, and then derived the closed-form solution expression of the variable-section catenary hingeless arch strain influence line. Then the analytical results are compared with the finite element analysis results. The maximum relative error between the numerical solution and the finite element result is less than 2%. The axial force effect varies with the ratio of the span to the position of the measuring point. The formulas presented in this paper have high engineering accuracy and reference value for calculation and analysis.

**Key words:** fixedarch; varying cross section catenary; strain influence line; elastic centermethod; practical analytical expression

---

引用本文/Cite this paper:

周宇, 许成超, 赵青, 等. 变截面悬链线无铰拱应变影响线的解析解 [J]. 计算力学学报, 2022, **39**(5): 551-556.

ZHOU Yu, XU Cheng-chao, ZHAO Qing, et al. Practical analytical expression to strain influence line of varying cross section catenary fixed arch [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(5): 551-556.