

DOI: 10.7511/jslx20210414001

# 模拟相变问题的精细积分边界元法

姚鸿骁<sup>1</sup>, 左冲<sup>2</sup>, 胡小飞<sup>1</sup>, 姚伟岸<sup>\*1</sup>

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024; 2. 三一重工集团有限公司, 武汉 430100)

**摘要:**将精细积分边界元法和界面追踪法相结合求解相变问题。因为边界元法只需要将待求解空间域的边界离散,方便连续追踪移动界面位置和重构网格,所以边界元法适合应用于移动边界问题的模拟。首先,利用精细积分边界元法在固相区域和液相区域分别求解相应的瞬态热传导控制方程,从而求得温度场和边界热流密度。然后,根据固-液相变界面上的能量平衡方程,利用热流密度求得相变界面的移动速度,再采用界面追踪法预测移动相变界面的位置变化。最后,给出了几个数值算例,并通过与参考解的对比验证本文方法的准确性。

**关键词:**相变问题;精细积分法;径向积分边界元法;界面追踪法

**中图分类号:**O241.8 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2022)05-0545-06

## 1 引言

相变传热问题常见于多种工程实际问题中,如金属铸造、焊接、晶体生长、食品冷冻和相变储能系统<sup>[1]</sup>等。因为相变过程中存在随时间变化的相变界面以及潜热的吸收或者释放,因此相变问题属于非线性问题。只有少数一维或半无限问题可以获得解析解,相变问题主要依靠数值方法求解。

处理移动界面和潜热变化的方法主要有固定域法和界面追踪法两种。固定域法将模拟区域视为一个整体,基于热焓、等效热容或者热源项建立统一的传热控制微分方程,并通过温度场的插值确定相变界面的位置<sup>[2,3]</sup>。但由于相变温度附近参数存在不连续性甚至阶跃,其非线性方程的模拟存在收敛性问题,尤其是相变潜热数值较大时。界面追踪法则不需要处理这种不连续性,而是分别在固相和液相两个区域中求解瞬态传热问题,然后根据相变界面上的能量连续条件追踪界面的移动<sup>[4]</sup>,但界面追踪法需要连续地对离散网格进行重划分。

空间离散的数值方法主要有有限元法、有限差分法、有限体积法、无网格法和边界元法。其中边界元法已经成为求解传热问题的有效方法之一,如周枫林等<sup>[5]</sup>使用边界元法分析了混凝土水坝的瞬态热传导问题;高效伟等<sup>[6]</sup>提出了一种三维等参管单

元边界元法,并将其应用于热传导分析中;赵金军等<sup>[7]</sup>提出了一种计算几乎奇异边界积分的边界元方法并求解了三维非均质热传导问题。相对其他方法,边界元法的主要优点是只需离散求解域的边界。因此,边界元法非常适合于求解移动边界问题和边界未知的反问题,如左冲等<sup>[8]</sup>利用时域径向积分边界元法和界面追踪法模拟了平面单相凝固问题;Wang等<sup>[9]</sup>将边界元法与水平集法相结合模拟了具有复杂拓扑变化的相变问题;Yu等<sup>[10]</sup>提出了一种基于边界元法的直接反演方法来辨识内部空腔的形状。

本文采用精细积分边界元法和界面追踪法求解两相等温相变问题。首先,分别在固液两相中利用位势问题的基本解建立积分方程,并采用径向积分法<sup>[11]</sup>将其中的域积分转化为边界积分。然后,利用边界元法和精细积分法<sup>[12]</sup>分别求得固液两相的温度场和边界热流密度。最后,基于相变界面上的能量平衡方程,采用界面追踪法得到移动界面的位置。

## 2 控制方程

如图1所示的二维相变问题,相变界面 $\Gamma_{if}$ 将整个区域 $\Omega_{total}$ 分为固相 $\Omega_s$ 和液相 $\Omega_l$ 两个区域。如忽略密度变化,则传热控制微分方程为

$$\nabla \cdot [k_s \nabla T_s(\mathbf{x}, t)] + f(\mathbf{x}, t) = \rho c_s [\partial T_s(\mathbf{x}, t) / \partial t] \quad (\mathbf{x} \in \Omega_s) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot [k_l \nabla T_l(\mathbf{x}, t)] + f(\mathbf{x}, t) = \rho c_l [\partial T_l(\mathbf{x}, t) / \partial t] \quad (\mathbf{x} \in \Omega_l) \quad (2)$$

收稿日期:2021-04-14;修改稿收到日期:2021-06-18。  
基金项目:国家自然科学基金(11672064)资助项目。  
作者简介:姚伟岸\*(1963-),男,博士,教授  
(E-mail: ywa@dlut.edu.cn).

式中  $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ ,  $\nabla=\partial/\partial x_1 \mathbf{i}+\partial/\partial x_2 \mathbf{j}$ ,  $T(\mathbf{x}, t)$  为  $t$  时刻点  $\mathbf{x}$  的温度,  $c, k$  和  $\rho$  分别为比热容、热导率和密度,  $f(\mathbf{x}, t)$  为域内热源。

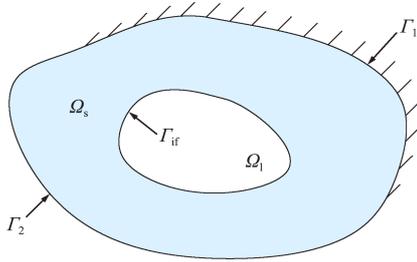


图1 相变问题  
Fig.1 Phase change problem

边界条件为

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_1) \quad (3)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = -k \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_2) \quad (4)$$

式中  $\mathbf{n}$  为单位外法向量,  $q$  为热流密度。

初始条件为

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad (t = 0) \quad (5)$$

相变界面  $\Gamma_{if}$  的温度条件和能量平衡条件

$$T(\mathbf{x}, t) = T_m \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{if}) \quad (6)$$

$$k_s \frac{\partial T_s(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}_s} + k_l \frac{\partial T_l(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}_l} = \rho L V_n \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{if}) \quad (7)$$

式中  $T_m$  为相变温度,  $L$  为相变潜热,  $V_n$  为相变界面的法向移动速度, 其由固液两相的热流得到。

分别在固相域和液相域中应用径向积分边界元法求解, 省略下标  $s$  和  $l$ , 固液两相的控制方程可统一写为

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\mathbf{x}, t)] + f(\mathbf{x}, t) = \rho c \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (8)$$

### 3 精细积分边界元法

基于式(8)的积分方程为

$$c(\mathbf{y})kT(\mathbf{y}, t) = k \int_{\Gamma} G \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - k \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} T d\Gamma - \int_{\Omega} G f d\Omega - \rho c \int_{\Omega} G \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (9)$$

式中 当  $\mathbf{y}$  位于边界时,  $c(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y})/(2\pi)$ ,  $\varphi(\mathbf{y})$  为边界点  $\mathbf{y}$  的两侧切线内夹角, 当  $\mathbf{y}$  位于域内时,  $c(\mathbf{y}) = 1$ ,  $G$  为基本解, 对于二维问题其表达式为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (10)$$

式中  $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  为源点  $\mathbf{y}$  到场点  $\mathbf{x}$  的距离。

需要利用径向积分法<sup>[11]</sup>将式(9)的域积分转化为边界积分, 其中  $\partial T(\mathbf{x}, t)/\partial t$  为未知量, 可用径

向基函数和坐标分量的多项式将其近似表示为

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i(R) + \bar{\beta}_1 x_1 + \bar{\beta}_2 x_2 + \bar{\beta}_3 \quad (11)$$

式中  $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  为应用点  $\mathbf{x}_i$  到场点  $\mathbf{x}$  的距离,  $N$  为节点总数,  $\phi_i(R)$  为径向基函数,  $\beta_i$  和  $\bar{\beta}_i$  为待求系数。式(9)的域积分可转化为边界积分

$$c(\mathbf{y})kT(\mathbf{y}) = k \int_{\Gamma} G \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - k \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{F(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \rho c \mathbf{D}_y \dot{\mathbf{T}} \quad (12)$$

$$\text{式中 } F(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int_0^{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, t) \xi d\xi \quad (13)$$

式中  $\mathbf{D}_y$  为  $N$  维横向量, 其第  $j$  个分量为

$$D_{y,j} = \sum_{i=1}^N \Psi_{ij} \int_{\Gamma} \frac{T^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \Psi_{(N+1)j} \int_{\Gamma} \frac{r_{,1} T^{(A1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \Psi_{(N+1)j} \int_{\Gamma} \frac{T^{(A2)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \Psi_{(N+2)j} \int_{\Gamma} \frac{r_{,2} T^{(A1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \Psi_{(N+2)j} \int_{\Gamma} \frac{T^{(A2)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \Psi_{(N+3)j} \left( \int_{\Gamma} \frac{T^{(A2)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right) \quad (14)$$

$$\text{式中 } T^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int_0^{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi_i \xi d\xi \quad (15)$$

$$T^{(A1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int_0^{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xi^2 d\xi \quad (16)$$

$$T^{(A2)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int_0^{r(\mathbf{z}, \mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xi d\xi \quad (17)$$

将边界  $\Gamma$  离散为  $N_e$  个边界单元和  $N_b$  个边界点, 域内配置  $N_i$  个内部点,  $N = N_b + N_i$ 。源点  $\mathbf{y}$  取遍所有边界点和内部点, 由式(12)得出式(18), 即

$$\mathbf{C}_y \mathbf{T}_b = \mathbf{G}_b \mathbf{q}_b - \hat{\mathbf{H}}_b \mathbf{T}_b - \mathbf{f}_b - \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{T}} \\ \mathbf{T}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{q}_b - \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{T}_b - \mathbf{f}_i - \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{T}} \quad (18)$$

式中  $\hat{\mathbf{H}}_b, \hat{\mathbf{H}}_i, \mathbf{G}_b$  和  $\mathbf{G}_i$  为边界元法产生的系数矩阵,  $\mathbf{C}_b, \mathbf{C}_i, \mathbf{f}_b$  和  $\mathbf{f}_i$  为径向积分法产生的系数矩阵和向量。根据边界条件, 有  $N_{b1}$  个边界点温度已知,  $N_{b2}$  个边界点热流已知, 记  $N_b = N_{b1} + N_{b2}$ 。按照文献[13]的方法, 根据边界条件将式(18)的矩阵向量分块并重新组合得到

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{r} \quad (19)$$

然后, 利用精细积分法<sup>[12]</sup>求解式(19), 如果  $\mathbf{r}$  在时间步  $[t_k, t_{k+1}]$  内是关于时间的线性函数, 则式(19)的求解如下。

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{E}[\mathbf{X}_k + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1] - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{r}_0 + \Delta t\mathbf{r}_1) - \mathbf{r}_1 \quad (20)$$

式中  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ,  $\mathbf{E} = \exp(\mathbf{B}\Delta t)$   
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_k)$ ,  $\mathbf{r}_1 = [\mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}_0]/\Delta t$

### 4 界面追踪法

为了追踪相变界面的移动位置,界面追踪法首先需要确定界面的移动速度和方向。界面移动速度由式(7)计算得到,而界面移动方向由式(21)计算<sup>[14]</sup>

$$\tilde{\mathbf{n}}_j = \frac{l_{i-1}\mathbf{n}_{i-1} + l_i\mathbf{n}_i}{l_{i-1} + l_i}, \mathbf{n}_j = \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{\|\tilde{\mathbf{n}}_j\|_2} \quad (21)$$

式中 下标  $j$  为移动界面上的  $j$  号节点,下标  $i-1$  和  $i$  为  $j$  号节点相邻的两个单元,  $l$  为单元长度。

时间步  $[t_k, t_{k+1}]$  内界面追踪法的步骤如下。

(1) 指定一个界面最大移动距离  $\Delta s$ 。

(2) 根据初始条件或者上一时间步数值结果得到  $t_k$  时刻固相域和液相域的边界热流  $\mathbf{q}_s(t_k)$  和  $\mathbf{q}_l(t_k)$ , 跟据式(7)计算速度  $\mathbf{V}(t_k) = \{\mathbf{V}_j(t_k)\}$ 。

(3) 利用式(22)计算时间步长<sup>[15]</sup>

$$\Delta t_{k+1} = \Delta s \rho L / \|\mathbf{V}(t_k)\|_\infty \quad (22)$$

式中  $\|\cdot\|_\infty$  为向量的无穷范数。

(4) 预测  $t_{k+1}$  时刻的界面移动速度为  $\mathbf{V}^p(t_{k+1}) = 0.7\mathbf{V}(t_k)$ 。

(5) 利用式(23)计算移动界面上节点预测位置  $\mathbf{x}_j(t_{k+1}) = \mathbf{x}_j(t_k) + \Delta t_{k+1}[\mathbf{V}_j(t_k) + \mathbf{V}_j^p(t_{k+1})]\mathbf{n}_j/2$  (23)

(6) 更新  $t_{k+1}$  时刻的网格,在固相域和液相域分别利用精细积分边界元法求解未知温度场和热流密度  $\mathbf{q}_s(t_{k+1})$  和  $\mathbf{q}_l(t_{k+1})$ , 再依据式(7)计算速度  $\mathbf{V}(t_{k+1}) = \{\mathbf{V}_j(t_{k+1})\}$ 。

(7) 收敛性检测,如收敛条件满足

$$\frac{\|\mathbf{V}(t_{k+1}) - \mathbf{V}^p(t_{k+1})\|_2}{\|\mathbf{V}(t_{k+1}) + \mathbf{V}(t_k)\|_2} \leq \epsilon \quad (24)$$

则进入步骤(8),否则令  $\mathbf{V}^p(t_{k+1}) = \mathbf{V}(t_{k+1})$ , 回到步骤(5)。

(8) 步骤(5)得到的移动界面位置和步骤(6)得到的温度场即为  $t_{k+1}$  时刻的计算结果,对移动界面进行网格重划分,并根据需要增加或者删减内部节点。令  $t_k = t_{k+1}$ , 回到步骤(1)。

### 5 数值算例

利用四个数值算例来验证本文提出的数值方法。数值计算通过 Matlab 编程实现,界面追踪法终止迭代的容许差限统一为  $\epsilon = 0.001$ 。

**算例 1** 考虑一个一维半无限凝固相变问题。

初始温度为  $T_0 = 2^\circ\text{C}$ ,  $x_1 = 0$  处边界的温度保持为  $T_w = -10^\circ\text{C}$ ,其他边界保持绝热。相变材料的热物理参数列入表 1。该问题可用图 2 所示的二维  $1 \times 0.1(\text{m}^2)$  矩形区域的相变问题近似。

表 1 相变材料热物理参数

Tab.1 Thermo-physical properties of the phase change materials

| Properties   | Example 1 | Example 2 | Example 3 | Example 4 |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $T_m/^\circ\text{C}$                                       | 0         | 0         | 55.8      | 0         |
| $L/\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$                          | 70.26     | 0.25      | 232400    | 37800     |
| $\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$                       | 1         | 1         | 771.2     | 1000      |
| $c_s/\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$ | 1         | 1         | 2176      | 4200      |
| $c_l/\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$ | 2         | 1         | 2176      | 4200      |
| $k_s/\text{W} \cdot (\text{m} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$  | 2         | 1         | 0.089     | 0.6       |
| $k_l/\text{W} \cdot (\text{m} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$  | 1         | 1         | 0.089     | 0.6       |

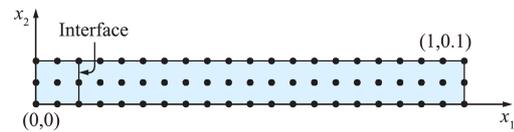


图 2 算例 1 的边界元计算模型  
Fig.2 BEM model for Example 1

在计算过程中,相变界面每移动 0.02 m,则在固相域增加 2 个边界节点和 3 个内部节点,相应地在液相域减少 2 个边界节点和 3 个内部节点。图 3 给出了不同时刻相变界面位置与解析解<sup>[16]</sup>对比的相对误差,吻合良好。可以看出,  $\Delta s$  分别取 0.004 m, 0.006 m 和 0.008 m 时,最大误差分别是 0.63%, 0.89% 和 1.15%, 计算结果均具有很高精度。

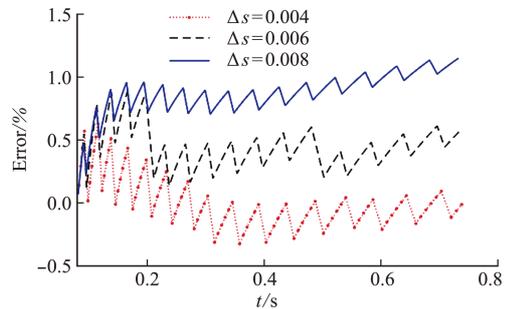


图 3 算例 1 的界面位置相对误差  
Fig.3 Relative errors of interface position for Example 1

**算例 2** 考虑一个无限角域凝固问题。初始温度为  $T_0 = 0.3^\circ\text{C}$ ,  $x_1 = 0$  和  $x_2 = 0$  处边界的温度保持为  $T_w = -1^\circ\text{C}$ ,其他边界保持绝热。相变材料的热物理参数列入表 1。该问题可用图 4 所示的一个二维  $1 \times 1(\text{m}^2)$  正方形区域的凝固相变问题来近似。

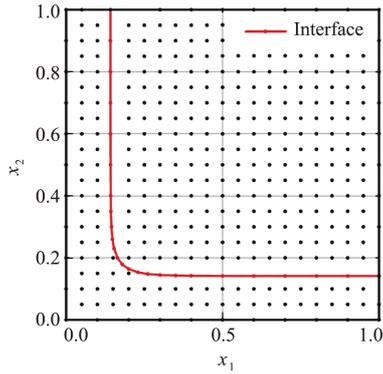


图4 算例2的边界元计算模型  
Fig. 4 BEM model for Example 2

表2列出了  $\Delta s=0.02$  m 时,采用本文方法模拟得到的不同时刻相变界面与  $x_1=1$  和  $x_1=x_2$  两条直线交点的  $x_2$  坐标值以及对应的解析解<sup>[17]</sup>,其中括号内为相对误差,最大相对误差分别为 0.96% 和 0.44%。虽然界面追踪法需要迭代求解相变界面的位置,但本文方法能够快速收敛得到结果,如对算例2,每个时间步的平均迭代次数为 2.9,最大次数为 4。

表2 算例2相变界面位置与误差

Tab. 2 Interface positions and relative errors for Example 2

| Time     | $x_2$ coordinates |        | $x_2$ coordinates   |        |
|----------|-------------------|--------|---------------------|--------|
|          | along $x_1=1$ BEM | Ref    | along $x_1=x_2$ BEM | Ref    |
| 0.011189 | 0.1508 (0.75%)    | 0.1497 | 0.1895 (0.03%)      | 0.1895 |
| 0.019376 | 0.1982 (0.58%)    | 0.1979 | 0.2495 (0.07%)      | 0.2493 |
| 0.025322 | 0.2262 (0.36%)    | 0.2253 | 0.2847 (0.12%)      | 0.2850 |
| 0.032003 | 0.2545 (0.42%)    | 0.2535 | 0.3199 (0.17%)      | 0.3204 |
| 0.039594 | 0.2830 (0.30%)    | 0.2821 | 0.3553 (0.30%)      | 0.3564 |
| 0.047916 | 0.3117 (0.33%)    | 0.3107 | 0.3908 (0.34%)      | 0.3921 |
| 0.056997 | 0.3397 (0.10%)    | 0.3394 | 0.4258 (0.42%)      | 0.4276 |
| 0.066796 | 0.3689 (0.19%)    | 0.3682 | 0.4609 (0.44%)      | 0.4629 |
| 0.077325 | 0.3985 (0.32%)    | 0.3972 | 0.4959 (0.43%)      | 0.4981 |
| 0.088672 | 0.4294 (0.55%)    | 0.4270 | 0.5311 (0.43%)      | 0.5334 |
| 0.100817 | 0.4619 (0.96%)    | 0.4575 | 0.5664 (0.41%)      | 0.5688 |

**算例3** 如图5所示,考虑一个带翼铜管相变储能装置的相变问题。初始温度为  $T_0=64.8$  °C,内管边界的温度保持为  $T_w=21.56$  °C,其他边界保持绝热。相变材料的热物理参数列入表1。铜的密度  $\rho=8920$  kg/m<sup>3</sup>,比热容  $c=380$  J/(kg·°C),热导率  $k=400$  W/(m·°C)。

虽然铜管域内不发生相变,但需对铜管进行瞬态热传导问题数值分析。分别在铜管域和相邻的相变材料域应用边界元法,得到两组微分方程。基于铜管-相变材料界面上的温度连续条件

和热流平衡条件,这两组微分方程可联立形成一组新微分方程组。利用精细积分法求解得到温度场和边界热流。

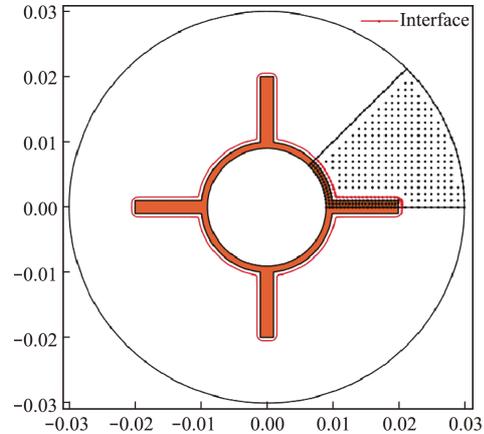


图5 算例3的边界元计算模型  
Fig. 5 BEM model for Example 3

基于对称性,选取装置截面的 1/8 进行数值计算。图6给出了不同时刻相变界面的移动位置,同时图7给出了固相分数的变化。以 ANSYS 软件的数值模拟结果作为参考解,对比结果表明,本方法具有很高的模拟精度。

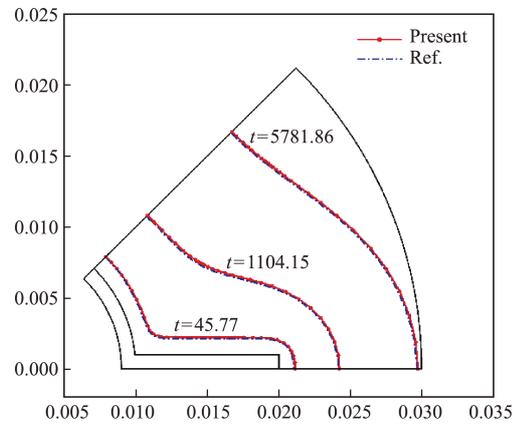


图6 算例3的相变界面位置  
Fig. 6 Phase change interface position for Example 3

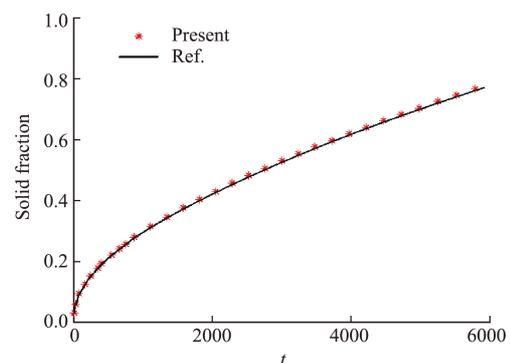


图7 算例3的固相分数变化  
Fig. 7 Evolution of solid fraction for Example 3

**算例 4** 考虑如图 8 所示区域的相变问题。初始温度为  $T_0 = -10\text{ }^\circ\text{C}$ , 外边界的温度保持为  $T_w = 25\text{ }^\circ\text{C}$ 。相变材料的热物理参数列入表 1。

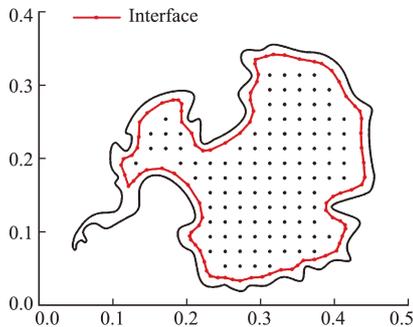


图 8 算例 4 的边界元计算模型  
Fig. 8 BEM model for Example 4

图 9 给出了不同时刻相变界面的移动位置, 并与 ANSYS 软件数值结果进行了对比。可以看出相变区域发生了拓扑变化, 但本文方法仍然能够有效且精确地模拟此类相变问题。

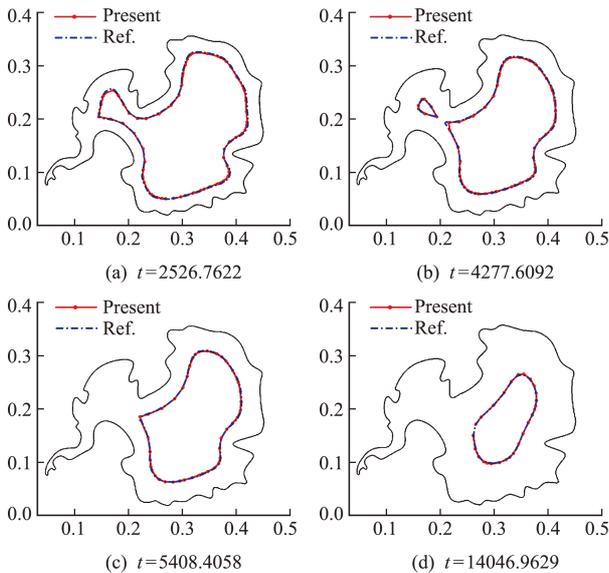


图 9 算例 4 的相变界面位置  
Fig. 9 Phase change interface position for Example 4

## 6 结 论

本文将精细积分边界元法与界面追踪法相结合求解二维双相相变问题。数值算例的结果表明, 本文提出的方法能够有效地模拟相变问题, 并且具有精度高和迭代次数少的优点。对于相变区域发生拓扑变化的问题本文方法仍然是有效的, 能够得到精确的模拟结果。当相变界面最大移动距离  $\Delta s$  取不同数值时, 本文方法依然能够得到稳定的数值解, 表明本文方法具有很好的数值稳定性。

## 参考文献(References):

- [1] Lin Y X, Jia Y T, Alva G, et al. Review on thermal conductivity enhancement, thermal properties and applications of phase change materials in thermal energy storage[J]. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2018, **82**: 2730-2742.
- [2] He Y Q, Dong X C, Yang H T. A new adaptive algorithm for phase change heat transfer problems based on quadtree SBFEM and smoothed effective heat capacity method[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2019, **75**(2): 111-126.
- [3] Yang H T, He Y Q. Solving heat transfer problems with phase change via smoothed effective heat capacity and element-free Galerkin methods[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2010, **37**(4): 385-392.
- [4] Yao W A, Wang Z H, Zuo C, et al. Precise time-domain expanding boundary element method for solving phase change problems[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2019, **76**(4): 203-223.
- [5] 周枫林, 李光, 孙晓, 等. 水坝瞬态热传导分析中的拟初始条件边界元法[J]. *计算力学学报*, 2016, **33**(6): 826-833. (ZHOU Feng-lin, LI Guang, SUN Xiao, et al. Application of quasi-initial condition boundary element method in transient heat conduction problem on gravity dams[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(6): 826-833. (in Chinese))
- [6] 高效伟, 曾文浩, 崔苗. 等参管单元及其在热传导问题边界元法中的应用[J]. *计算力学学报*, 2016, **33**(3): 328-334. (GAO Xiao-wei, ZENG Wen-hao, CUI Miao. Isoparametric tube elements and their application in heat conduction BEM analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(3): 328-334. (in Chinese))
- [7] 赵金军, 彭海峰, 原志超, 等. 三维变系数热传导问题边界元分析中几乎奇异积分计算[J]. *计算力学学报*, 2015, **32**(1): 7-13. (ZHAO Jin-jun, PENG Hai-feng, YUAN Zhi-chao, et al. Evaluation of nearly singular integrals in boundary element analysis of 3D heat conduction problem with variable coefficients[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(1): 7-13. (in Chinese))
- [8] 左冲, 姚鸿晓, 姚伟岸. 时域径向积分边界元法在平面单相凝固问题中的应用[J]. *工程力学*, 2019, **36**(3): 33-39. (ZUO Chong, YAO Hong-xiao, YAO Wei-an. The application of the time domain radial in-

- tegral boundary element method in 2D one-phase solidification[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(3): 33-39. (in Chinese))
- [9] Wang Z H, Yao W A, Zuo C, et al. Solving phase change problems via a precise time-domain expanding boundary element method combined with the level set method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, **126**: 1-12.
- [10] Yu B, Tong Y, Hu P M, et al. A novel inversion approach for identifying the shape of cavity by combining Gappy POD with direct inversion scheme[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, **150**: 119365.
- [11] Gao X W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, **26**(10): 905-916.
- [12] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136. (in Chinese))
- [13] Yao W A, Yao H X, Zuo C, et al. Precise integration boundary element method for solving dual phase change problems based on the effective heat capacity model[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, **108**: 411-421.
- [14] O'Neill K. Boundary integral equation solution of moving boundary phase change problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, **19**(12): 1825-1850.
- [15] Yu B, Yao W A, Gao X W, et al. Radial integration BEM for one-phase solidification problems[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014, **39**: 36-43.
- [16] Crank J. *Free and Moving Boundary Problems*[M]. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- [17] Rathjen K A, Jiji L M. Heat conduction with melting or freezing in a corner[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1971, **93**(1): 101-109.

## Simulation of phase change problems by precise integration boundary element method

YAO Hong-xiao<sup>1</sup>, ZUO Chong<sup>2</sup>, HU Xiao-fei<sup>1</sup>, YAO Wei-an<sup>\*1</sup>

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Sany Heavy Industry Co., Ltd., Wuhan 430100, China)

**Abstract:** The precise integration boundary element method is combined with the front tracking method to simulate the phase change problems in this paper. One of the merits for the boundary element method is that only the boundary needs to be discretized, so it is easy for the implementation of grid deforming and remeshing. Firstly, the governing equations of heat conduction are solved by the precise integration boundary element method in the solid phase domain and the liquid phase domain respectively, and the moving velocity of the solid-liquid interface can be obtained by the heat flux on the interface and the energy balance equation. Then, an iterative algorithm of the front tracking method is adopted to track the moving interface. Finally, several numerical examples are presented to verify the validity and accuracy of the proposed method.

**Key words:** phase change; precise integration method; radial integral boundary element method; front tracking method

引用本文/Cite this paper:

姚鸿晓, 左冲, 胡小飞, 等. 模拟相变问题的精细积分边界元法[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(5): 545-550.

YAO Hong-xiao, ZUO Chong, HU Xiao-fei, et al. Simulation of phase change problems by precise integration boundary element method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(5): 545-550.