

梁式结构受移动荷载作用非平稳随机振动的 DQ-PEM 方法

张 琮^{*1}, 杜永峰^{1,2}, 朱前坤^{1,2}

(1. 兰州理工大学 防震减灾研究所, 兰州 730050;

2. 兰州理工大学 甘肃省减震隔震国际合作研究基地, 兰州 730050)

摘 要: 针对梁式结构受移动荷载作用的非平稳随机振动问题, 提出了一种综合利用微分求积法和虚拟激励法 DQ-PEM 的新方法。梁式结构受移动荷载作用的振动控制方程为含 Dirac 函数的偏微分方程, 利用微分求积 (DQ)-积分求积法 (IQ) 法将其振动控制方程转化为不含 Dirac 函数的常微分方程。同时, 将表示荷载位置变化的 Dirac 函数视为移动荷载的非平稳化函数, 再结合虚拟激励法的思想, 可得梁式结构在确定性荷载作用下的虚拟响应, 进而得到其非平稳随机响应。通过工程算例验证了该方法的准确性与有效性, 并进一步讨论了不同速度和不同边界条件下梁式结构受移动荷载作用的随机振动问题。

关键词: 梁式结构; 移动荷载; 虚拟响应; 非平稳随机振动; DQ-PEM 方法

中图分类号: O324

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2022)04-0413-07

1 引 言

梁式结构受移动荷载作用的振动问题具有广泛的工程背景, 如车辆在桥梁上行驶、行人在人行桥上行走以及栈道类运输系统等均可归结为此类问题^[1-5]。由于荷载作用位置变化等相关因素的影响, 移动荷载一般具有随机性, 梁式结构受移动荷载作用的振动一般也为随机振动^[6-8]。

利用传统随机振动方法处理梁式结构受移动荷载作用时的随机振动通常需要大量的计算工作, 效率较低。针对这一问题, 林家浩等^[9]提出了高效精确的虚拟激励法, 该方法在处理非平衡随机振动问题时最大的特点是将其转化为确定性时间历程分析, 计算效率提高 2~4 个数量级。利用虚拟激励法处理非平衡随机振动的关键是计算结构在确定性荷载作用下的虚拟响应, 现有做法一般是建立有限元模型后再利用振型叠加法计算^[7,8]。吕峰等^[6]综合利用虚拟激励法和精细积分法提出了一种基于有限元的精确高效算法来研究桥梁的随机动力特性。赵岩等^[7]基于虚拟激励法和傅里叶分析, 提出了一种求解移动随机荷载作用结构非平稳

随机振动的有效频域法。Caprani^[10]基于虚拟激励法研究了行人通过人行桥时的随机振动情况。以上研究在计算结构确定性荷载作用下的虚拟响应时利用了振型叠加的思想, 均需事先假定振型, 而对于半刚性边界的梁式结构, 估算精确的振型较为困难; 在振型叠加过程中通常只考虑有限低阶振型的贡献, 舍弃了高阶振型的影响; 对于移动荷载的处理, 以上做法要么通过有限元形函数向量将移动荷载向有限元节点施加, 要么采用精细积分的递推格式, 也较为繁琐。

可用分布参数体系的 Euler-Bernoulli 模型描述梁式结构, 其受移动荷载作用的控制方程是含 Dirac 函数的偏微分方程^[3,11]。Eftekhari^[12,13]提出综合利用微分求积法和积分求积法结合的方法研究结构受移动荷载作用的受迫振动问题, 该方法利用积分求积法离散 Dirac 函数, 利用微分求积法离散偏微分方程, 不必事先假定振型且能考虑高阶振型的影响, 数值计算结果显示出较高的精度与效率。文献^[4,14]将该方法推广到人行荷载作用下人行桥振动响应的求解, 并与传统的振型叠加计算结果对比, 证明该方法的高效性, 而后又将该方法扩展到半刚性边界下的人行桥受行人荷载作用的振动响应问题^[5]。

基于上述研究, 本文提出将微分求积-虚拟激励方法 DQ-PEM 用于梁式结构受移动荷载作用的

收稿日期: 2020-12-21; 修改稿收到日期: 2021-05-12.

基金项目: 国家自然科学基金 (51868046; 51668042; 52168041) 资助项目.

作者简介: 张 琮^{*} (1984-), 女, 硕士, 副教授
(E-mail: 283322638@qq.com).

非平衡随机振动问题。利用 DQ-IQ 法将梁式结构受移动荷载作用下含 Dirac 函数的偏微分方程转化为不含 Dirac 函数的常微分方程,用 DQ 法直接将其与时间无关的微分项转化为代数项,用 IQ 法将表示荷载位置变化的 Dirac 函数转化为代数项。将表示荷载位置变化的 Dirac 函数视为移动荷载的非平稳化函数,再结合虚拟激励法的思想,可得梁式结构的非平稳随机响应。结合具体算例分析了半刚性梁式结构受移动荷载作用的随机振动问题,讨论了不同速度和不同边界条件等因素对梁式结构随机振动的影响。

2 梁式结构受移动荷载作用的振动方程

梁式结构受移动荷载作用如图 1 所示。梁式结构采用均匀截面 Euler-Bernoulli 梁模型模拟,梁单位长度的质量为 ρA , 梁的跨度为 L , 粘滞阻尼系数为 c , 等效抗弯刚度为 EI , 半刚性支座的弹性抗扭刚度为 k_a 。

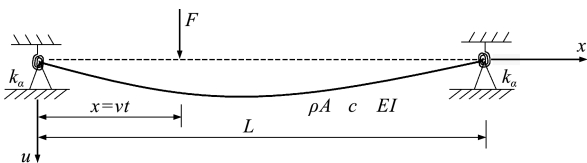


图 1 梁式结构受移动荷载作用
Fig. 1 Beam structure subjected to moving loads

2.1 受移动荷载作用梁的振动基本方程

梁式结构受匀速移动荷载作用的振动控制方程为^[3,4]

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \delta(x-vt)F(t) \quad (1)$$

式中 $u(x,t)$ 为梁的位移, v 为荷载移动速度, $\delta(x-vt)$ 为 Dirac 函数。

引入如下无量纲量,

$$\begin{cases} X = \frac{x}{L}, X_F(t) = \frac{vt}{L} \\ \alpha = \frac{\rho AL^4}{EI}, \beta = \frac{cL^4}{EI}, \lambda = \frac{F(t)L^3}{EI} \end{cases} \quad (2)$$

则式(1)变换为

$$\alpha \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(X,t)}{\partial X^4} = \lambda \delta(X - X_F(t)) \quad (3)$$

2.2 边界条件

假设梁式结构两端半刚性支座的抗扭刚度与其抗弯刚度之比为 η , 即

$$\eta = Lk_a/EI$$

则梁式结构半刚性边界,在 $X=0$ 处为

$$u(0,t) = 0, \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial X^2} - \eta \frac{\partial u(0,t)}{\partial X} = 0 \quad (4)$$

在 $X=1$ 处为

$$u(1,t) = 0, \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial X^2} + \eta \frac{\partial u(0,t)}{\partial X} = 0 \quad (5)$$

2.3 基本方程的离散化

令 $X_F = vt = X_p (1 \leq p \leq n)$, 利用 DQ-IQ 混合法以及 Dirac 函数的性质^[4,12,13], 式(3)转化为

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial^2 u(X_i,t)}{\partial t^2} \right\} + \beta \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial u(X_i,t)}{\partial t} \right\} + \\ & \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(4)} \{ u(X_j) \} = \begin{cases} 0 & (i \neq p) \\ \lambda & (i = p) \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $A_{ij}^{(4)}$ 为微分求积 4 阶权系数, R_j 为积分求积权系数, X_i 为节点分布 i 对应的 X 值, p 为某节点分布值。

微分求积 1 阶权系数可显式计算^[15]为

$$A_{ik}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (X_i - X_j)}{(X_i - X_k) \prod_{j=1, j \neq i}^n (X_k - X_j)} & (i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n) \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(1)} & (i = k, i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (7)$$

高阶权系数则由递推公式计算为

$$A_{ik}^{(r)} = \begin{cases} r \left(A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{X_i - X_k} \right) & (i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n) \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(r)} & (i = k, i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (8)$$

四阶微分方程每个端点有两个边界条件, X 节点选取采用如下形式^[15],

$$\begin{cases} X_1 = 0, X_2 = \Delta \\ X_{n-1} = 1 - \Delta, X_n = 1 \\ X_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(i-2)\pi}{n-3} \right] & (i = 3, 4, \dots, n-2; 0 \leq X \leq 1) \end{cases} \quad (9)$$

式中 Δ 为相邻两边节点的距离, Δ 可在 10^{-2} 和 10^{-4} 之间取值。

积分求积权系数 R_i 为^[12]

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2} \Delta X_1, R_n = \frac{1}{2} \Delta X_{n-1} \\ R_i = \frac{1}{2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) & (i = 2, 3, \dots, n-1) \end{cases} \quad (10)$$

式中 $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$ 。

式(6)写成矩阵形式^[14]为

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (11)$$

式中 $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 分别为梁式结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, $\{\ddot{u}(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$ 和 $\{u(t)\}$ 分别为加速度、速度和位移向量, $\{F(t)\}$ 为荷载向量, 结合式(6), $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 表达式分别为

$$[M] = \alpha[I], [C] = \beta[I], [K] = [A]^{(4)} \quad (12)$$

式中 $[A]^{(4)}$ 为微分求积 4 阶加权系数矩阵 $[A]$, I 为 $n \times n$ 的单位矩阵。

根据荷载在网格点上的静力平衡, 可得到荷载模型^[12,14]

$$F_i(t) = \frac{\lambda}{X_R + X_L} \begin{cases} \frac{X_R}{R_{p-1}} & (i = p-1) \\ \frac{X_L}{R_p} & (i = p) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

式中 $X_R = X_p - X_F(t)$, $X_L = X_F(t) - X_{p-1}$ 。

2.4 边界条件的离散化

边界条件式(4,5)的 DQ 格式为^[4]

$$u(0, t) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n A_{1,j}^{(2)} u(X_j) - \eta \sum_{j=1}^n A_{1,j} u(X_j) = 0 \quad (14a, 14b)$$

$$u(1, t) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n A_{n,j}^{(2)} u(X_j) + \eta \sum_{j=1}^n A_{n,j} u(X_j) = 0 \quad (14c, 14d)$$

式(14a, 14c)代入式(14b, 14d)后联立求解二元一次方程组得

$$u(X_2) = \left\{ \sum_{j=3}^{n-2} [CK1(A_{n,j}^{(2)} + \eta A_{n,j}) - CKN(A_{1,j}^{(2)} - \eta A_{1,j})] / (CN1 \cdot CKN - CK1 \cdot CNN) \right\} u(X_j) \quad (15a)$$

$$u(X_{n-1}) = \left\{ \sum_{j=3}^{n-2} [CNN(A_{1,j}^{(2)} - \eta A_{1,j}) - CN1(A_{n,j}^{(2)} + \eta A_{n,j})] / (CN1 \cdot CKN - CK1 \cdot CNN) \right\} u(X_j) \quad (15b)$$

$$\text{式中 } CN1 = A_{1,2}^{(2)} + \eta A_{1,2} \quad (16a)$$

$$CNN = A_{n,2}^{(2)} - \eta A_{n,2} \quad (16b)$$

$$CK1 = A_{1,n-1}^{(2)} + \eta A_{1,n-1} \quad (16c)$$

$$CKN = A_{n,n-1}^{(2)} - \eta A_{n,n-1} \quad (16d)$$

2.5 振动控制方程的离散化及求解

把式(14a, 14c, 15)代入式(11)得

$$\alpha[I]\{\ddot{u}_k\} + \beta[I]\{\dot{u}_k\} + \sum_{k=3}^{n-2} s\{u_k\} = \{F_i(t)\} \quad (i = 3, 4, \dots, n-2) \quad (17)$$

$$\text{式中 } s = A_{i,k}^{(4)} + \frac{A_{i,2}^{(4)} CK1 + A_{i,n-1}^{(4)} CKN}{CN}.$$

式(17)为二阶常系数微分方程, 利用 Newmark 或精细积分算法即可得到数值解。

由式(17)退化可得到梁式结构梁频率特征方程为

$$s\{u\} = \Omega^2 \{u\} \quad (18)$$

式中 Ω 为梁式结构的圆频率, $\{u\} = \{u_3, u_4, \dots, u_{n-2}\}$ 。

3 梁式结构受移动荷载作用非平稳随机振动的 DQ-PEM 法

虚拟激励法是在桥梁抗震分析中发展出来的随机振动系列算法, 该方法在处理非平衡随机振动问题时最大的特点是将其转化为确定性时间历程分析。尽管式(1)中荷载 $F(t)$ 是一个平稳过程, 但由于作用位置不断变化, 加之梁式结构为有限长度, 因此对梁式结构而言, 外激励为非平稳随机过程。式(1)右边的荷载项亦可视为由 Dirac 函数与荷载 $F(t)$ 组成的外激励均匀调制模型:

$$x(t) = \delta(x - vt) F(t) \quad (19)$$

$F(t)$ 为平稳随机过程, 假设荷载 $F(t)$ 的自谱密度为 $S_{XX}(\omega)$, 构造虚拟的移动确定性外部激励, 可写为

$$\tilde{x}(t, \omega) = \sqrt{S_{xx}(\omega)} \delta(x - vt) \exp(i\omega t) \quad (20)$$

替换式(1)右边的荷载项, 则虚拟响应为

$$\tilde{u}(t, \omega) = \sqrt{S_{xx}(\omega)} I(\omega, t) \quad (21)$$

$I(\omega, t)$ 为给定的确定性激励 $\delta(x - vt) \exp(i\omega t)$ 下结构的响应, 可由 DQ-IQ 混合法求得。

由结构的虚拟响应, 进一步可得到结构响应的演变谱密度为

$$S_{UU}(\omega, t) = \tilde{u}^*(t, \omega) \cdot \tilde{u}^T(t, \omega) = S_{XX}(\omega) I^*(\omega, t) I^T(\omega, t) \quad (22)$$

4 非平稳随机振动的 DQ-PEM 法计算步骤

梁式结构受移动荷载作用非平稳随机振动的 DQ-PEM 法的计算步骤如下。

(1) 输入梁式结构的结构参数 $\rho A, c, EI, L$ 和 k_α 。

(2) 已知结构的输入功率谱 $S_{XX}(\omega)$, 将整个外荷载的频率域 ω 划分成 N 段, 间隔为 $\Delta\omega$, 离散后每段外荷载频率为 $\omega_n = n\Delta\omega$ 。

(3) 利用 DQ-IQ 混合法求解每个 ω_n 对应的确定性荷载确定性激励 $\delta(x - vt) \exp(i\omega_n t)$ 作用下结构的响应 $I(\omega_n, t)$ 。

(4) 按式(22)求得每个 ω_n 对应的响应的演变功率谱密度 $S_{UU}(\omega_n, t)$ 。

(5) 对 ω_n 积分, 得到响应的演变功率谱密度,

$$S_{UU}(\omega, t) = \sum_{n=1}^N S_{UU}(\omega_n, t) \Delta\omega_n.$$

(6) 按式 $\sigma(t) = \sqrt{S_{UU}(\omega, t)}$ 得到结构响应的标准差。

5 工程算例

匀速移动荷载作用下, 半刚性约束单跨梁式结构的计算模型如图1所示。结构长 $L=30$ m, 其抗弯刚度 $EI=7.48 \times 10^{10}$ N·m², 单位长度线密度 $\rho A=10 \times 10^3$ kg/m, 振型阻尼比 $\xi=0.05$, 其阻尼系数为 $c \approx 3.00 \times 10^4$ N/(m·s)。假设移动随机荷载类型为限带宽白噪声, 其频率范围为 0 Hz~25 Hz, 标准差 $\sigma_x=100$ kN, 根据维纳-辛钦关系可得 $S_{xx}(\omega)=66.36$ kN²/(rad/s)。

图2为运用传统的振型叠加法和 DQ-PEM 法下的加速度响应, 蓝线是振型叠加法算出的加速度响应, 红线是 DQ-PEM 法算出的加速度响应。可以看出, 曲线几乎一致, 验证了 DQ-PEM 法的准确性。

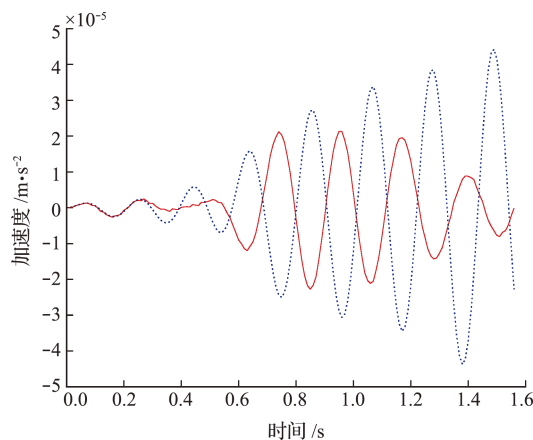


图2 加速度响应
Fig. 2 Acceleration response

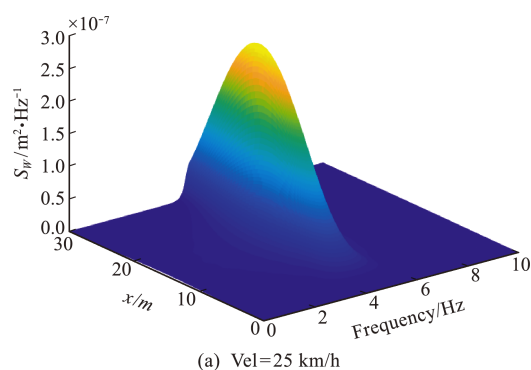
5.1 梁式结构自振频率

由式(18)计算梁式结构在简支、固支以及 η 为 1, 5 和 10 时的一阶频率分别为 4.773 Hz, 10.820 Hz, 5.587 Hz, 7.346 Hz 和 8.352 Hz。梁式结构在简支和固支的自振频率计算结果与解析值一致。

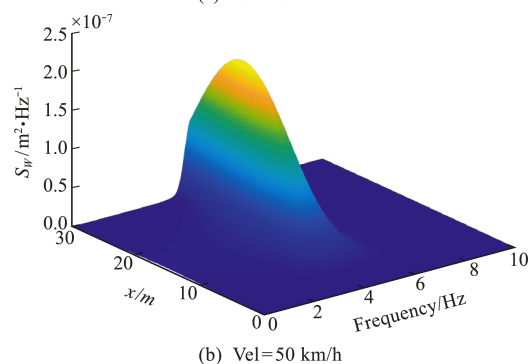
5.2 速度对随机振动响应统计量的影响

图3为不同移动速度下, 简支梁式结构跨中的位移演变功率谱。为了方便对比数值结果, 采用荷载瞬时位置 ($x=Vel \cdot t$) 表示 x 轴坐标。可以看出, 梁式结构的位移响应功率谱的峰值均在其自振频率 4.77 Hz 附近, 与荷载移动速度无关, 其峰值由共振

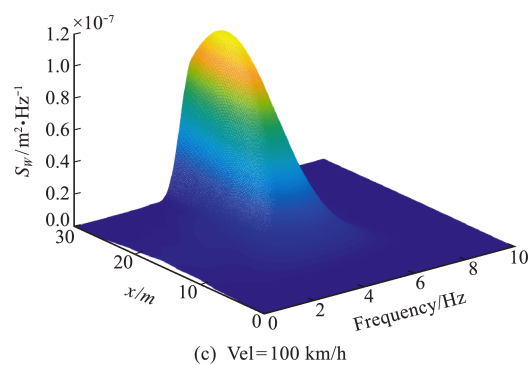
现象造成。荷载移动速度为 25 km/h, 50 km/h 和 100 km/h 时, 对应的位移响应演变功率谱峰值分别为 2.87×10^{-7} , 2.04×10^{-7} 和 1.11×10^{-7} m²/Hz, 其中 50 km/h 和 100 km/h 对应的位移响应演变功率谱峰值为 25 km/h 时的 0.71 倍和 0.39 倍。可见, 随着移动荷载速度的增大, 荷载作用时间变短, 响应演变功率谱的峰值随之减小, 但其频带会相应变宽。这一现象与文献[6,7]一致。图4为荷载以不同速度通过简支梁式结构时, 其跨中位移响应的时变方差。荷载移动速度为 25 km/h, 50 km/h 和 100 km/h 对应的位移响应时变方差最大值分别为 3.10×10^{-6} m², 2.80×10^{-6} m² 和 2.24×10^{-6} m², 其中 50 km/h 和 100 km/h 对应的位移时变方差最大值为 25 km/h 时的 0.90 倍和 0.72 倍。可以看出, 梁式结构跨中处的时变方差最大值随着荷载速度的增大而减小, 最大值出现时间随着荷载速度的增大而后移。



(a) Vel=25 km/h



(b) Vel=50 km/h



(c) Vel=100 km/h

图3 不同速度下梁式结构跨中的位移响应演变功率谱
Fig. 3 Evolution power spectrum of displacement response in span of beam structures at different velocities

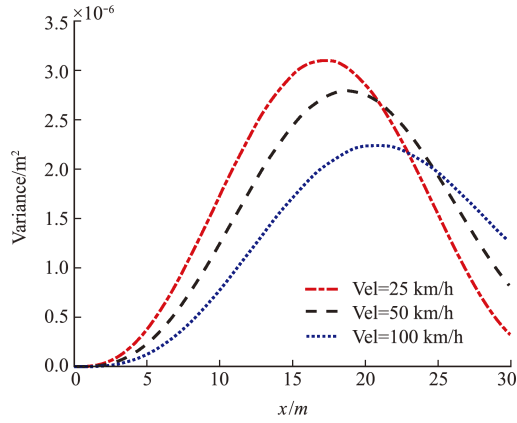


图4 不同速度下梁式结构跨中的时变方差

Fig. 4 Time-varying variance in midspan of beam structures at different velocities

5.3 边界条件对随机振动的影响

图5为梁式结构在简支、 η 为5以及固支约束下,其跨中在荷载以25 km/h速度作用下的位移响应演变功率谱。

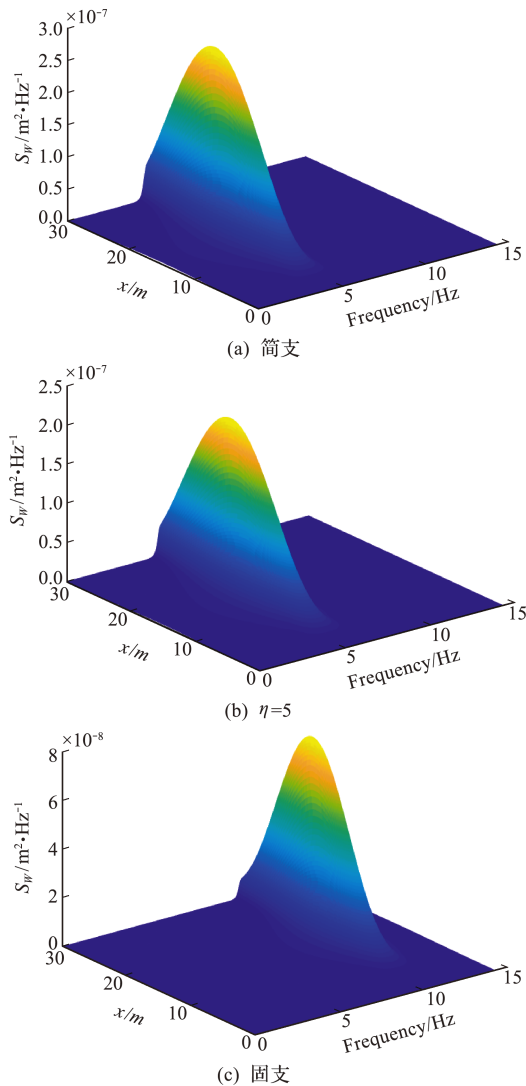


图5 不同边界下梁式结构跨中的位移响应演变功率谱

Fig. 5 Evolution power spectrum of displacement response of beam structures in spans with different boundaries

可以看出,梁式结构中点的位移响应演变功率谱峰值均出现在其自振频率处,三种不同约束条件下的演变功率谱峰值分别为 2.87×10^{-7} , 2.17×10^{-7} 和 0.78×10^{-7} , η 为5和固支约束的峰值为简支的0.76倍和0.27倍,可见梁式结构自振频率越高,演变功率谱峰值越低。

图6为梁式结构在简支、 η 为1,5和10以及固支约束下,其跨中在荷载以25 km/h速度作用下的位移响应时变方差,其峰值分别为 $3.10 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, $2.36 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, $1.52 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, $1.26 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ 和 $0.90 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, η 为1,5和10以及固支约束的位移响应时变方差为简支的0.76倍、0.49倍、0.41倍和0.29倍,可见梁式结构自振频率越高,时变方差峰值越小。从图5和图6可以看出,可以通过调整半刚性系数,控制梁式结构的响应。

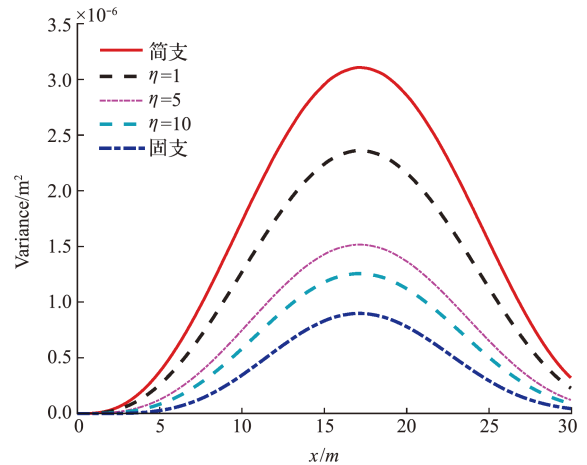


图6 不同边界下梁式结构跨中的时变方差

Fig. 6 Time-varying variance in midspan of beam structures with different boundaries

6 结 论

基于微分求积法和虚拟激励法,提出了一种求解移动随机荷载作用下半刚性梁式结构非平稳随机振动的高效方法。利用 DQ-IQ 混合法将含 Dirac 函数的梁式结构受移动荷载作用的偏微分振动控制方程转化为不含 Dirac 函数的常微分方程。同时,将表示荷载位置变化的 Dirac 函数视为移动荷载的非平稳化函数,再结合虚拟激励法的思想,得到梁式结构在确定性荷载作用下的虚拟响应,进而得到其非平稳随机响应。计算结果验证了该方法的准确性与有效性;算例结果表明,当移动荷载为随机移动荷载时,响应演变功率谱的峰值出现在结构自振频率附近,且梁式结构自振频率越大,其

响应的演变功率谱和时变方差的峰值越小,可通过调整半刚性系数,控制梁式结构的响应。

参考文献(References):

- [1] 李慧乐,夏 禾. 基于车桥耦合随机振动分析的钢桥疲劳可靠度评估[J]. 工程力学, 2017, **34**(2): 69-77. (LI Hui-le, XIA He. Fatigue reliability evaluation of steel bridges based on coupling random vibration analysis of train and bridge [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(2): 69-77. (in Chinese))
- [2] Zhang Z C, Lin J H, Zhang Y H, et al. Nonstationary random vibration analysis of coupled vehicle-bridge systems [J]. *Engineering Computations*, 2010, **27**(6): 712-732.
- [3] 朱前坤,李宏男,杜永峰,等. 不同行走步速下人行桥振动舒适度量化评估[J]. 工程力学, 2016, **33**(10): 97-104. (ZHU Qian-kun, LI Hong-nan, DU Yong-feng, et al. Quantitative evaluation of vibration serviceability of pedestrian bridge under different walking speed [J]. *Engineering Mechanics*, 2016, **33**(10): 97-104. (in Chinese))
- [4] Zhu Q K, Hui X L, Du Y F, et al. A full path assessment approach for vibration serviceability and vibration control of footbridge[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2019, **70**(6): 765-779.
- [5] Zhu Q K, Hui X L, Nan N N, et al. Study on the vertical dynamic coupled effects of the crowd-structure system based on the social force model[J]. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2019, **23**(5): 2243-2253
- [6] 吕 峰,林家浩,张亚辉. 移动随机荷载作用下桥梁振动分析[J]. 振动与冲击, 2008, **27**(12): 73-78, 180. (LÜ Feng, LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui. Dynamic analysis of bridges subjected to moving random loads [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, **27**(12): 73-78, 180. (in Chinese))
- [7] 赵 岩,周瑞鹏,贾 甜. 移动随机荷载作用下梁桥非平稳随机振动的 PEM-FFT 方法[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(1): 65-70. (ZHAO Yan, ZHOU Rui-peng, JIA Tian. PEM-FFT for non-stationary random vibration analysis of simple-supported beam bridge under moving random load [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(1): 65-70. (in Chinese))
- [8] 李红利,陈政清. 考虑荷载随机性的人行桥人致振动计算方法研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, **40**(10): 22-31. (LI Hong-li, CHEN Zheng-qing. A calculation method for footbridge vibration under stochastic pedestrian loading [J]. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*, 2013, **40**(10): 22-31. (in Chinese))
- [9] 林家浩,张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui. *Virtual Excitation Method of Random Vibration* [M]. Beijing: Science Publishing House, 2004. (in Chinese))
- [10] Caprani C C. Application of the pseudo-excitation method to assessment of walking variability on foot-bridge vibration[J]. *Computers & Structures*, 2014, **132**: 43-54.
- [11] Tubino F, Piccardo G. Tuned Mass Damper optimization for the mitigation of human-induced vibrations of pedestrian bridges[J]. *Meccanica*, 2015, **50**(3): 809-824.
- [12] Eftekhari S A. A note on mathematical treatment of the Dirac-delta function in the differential quadrature bending and forced vibration analysis of beams and rectangular plates subjected to concentrated loads[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, **39**(20): 6223-6242.
- [13] Eftekhari S A. Differential quadrature procedure for in-plane vibration analysis of variable thickness circular Arches traversed by a moving point load[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, **40**(7-8): 4640-4663.
- [14] 张 琼,南娜娜,朱前坤,等. 人行荷载下梁式结构振动分析的DQ-IQ混合法[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(2): 166-172. (ZHANG Qiong, NAN Na-na, ZHU Qian-kun, et al. DQ-IQ hybrid method for structure vibration analysis of beam structure under pedestrian loading [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(2): 166-172. (in Chinese))
- [15] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(1): 1-28.

DQ-PEM for non-stationary random vibration analysis of beam structures under moving loads

ZHANG Qiong^{*1}, DU Yong-feng^{1,2}, ZHU Qian-kun^{1,2}

(1. Institute of Earthquake Protection and Disaster Mitigation, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. International Research Base on Seismic Mitigation and Isolation of Gansu Province, Lanzhou University of Technology,
Lanzhou 730050, China)

Abstract: The DQ-PEM method for non-stationary random vibration of beam structures subjected to moving loads is proposed, which combines differential quadrature method and pseudo-excitation method. Generally, the vibration control equation of beam structures subjected to moving loads is a partial differential equation containing the Dirac function. First, the DQ-IQ hybrid method is used to transform the equation into ordinary differential equations that do not contain the Dirac function. Simultaneously, the Dirac function representing the change of load position is also regarded as the non-stationary function of moving loads. Then, combined with the pseudo-excitation method, the pseudo-response of a beam structure subjected to a deterministic load can be obtained, and finally its non-stationary random response can be obtained. The accuracy and validity of the method are verified by engineering examples. The random vibration of beam structures subjected to moving loads at different velocities and boundary conditions is further discussed.

Key words: beam structures; moving loads; pseudo-response; non-stationary random vibration; DQ-PEM

引用本文/Cite this paper:

张 琼, 杜永峰, 朱前坤. 梁式结构受移动荷载作用非平稳随机振动的 DQ-PEM 方法[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(4): 413-419.

ZHANG Qiong, DU Yong-feng, ZHU Qian-kun. DQ-PEM for non-stationary random vibration analysis of beam structures under moving loads[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(4): 413-419.