

DOI: 10.7511/jslx20210309001

# 机器学习在求解一维双曲守恒律方程中的应用

赵青宇, 郑素佩\*, 李 霄

(长安大学 理学院, 西安 710064)

**摘 要:** 双曲守恒律方程对空气动力学、物理学和海洋学等众多领域问题的计算有着重大意义, 本文应用机器学习框架下的 BP 神经网络对双曲守恒律方程近似求解。首先, 采用熵稳定格式及基于自适应移动网格的熵稳定格式所得多个时间层的数值解构造网络输入, 采用高分辨率熵稳定格式所得对应的多个时间层的数值解构造网络输出, 并对数据集作归一化处理。随后, 利用三层的 BP 神经网络训练数据, 从而得到性能良好的神经网络, 以实现对任一给定时间层节点处数值解的预测。最后, 通过五个数值算例表明该算法适用于该类问题的解决, 数值结果分辨率高, 且无非物理振荡产生。

**关键词:** 双曲守恒律方程; 机器学习; BP 神经网络; 熵稳定格式; 自适应移动网格

**中图分类号:** O242.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2022)02-0229-08

## 1 引 言

双曲守恒律方程是描述空气动力学、物理学和海洋学等诸多领域问题的一类数学模型。基于不论初始条件多么光滑, 该类方程的解都可能会出现间断这一事实, 其数值求解算法一直广受关注。针对非线性双曲型守恒律方程的间断现象, 经典解理论不再适用, 于是引入了弱解的概念, 并提出通过熵稳定条件来保证解的唯一性。为满足这一条件, 应添加适当的数值粘性项。而对于这一问题, Tadmor<sup>[1]</sup>定义了一类具有二阶精度的熵守恒格式。为进一步研究, 根据 Tadmor<sup>[1]</sup>给出的比较原则, Ismail 等<sup>[2]</sup>提出了熵稳定格式。Fjordholm 等<sup>[3]</sup>基于满足符号性质的 ENO<sup>[4]</sup>重构了高阶熵稳定格式。郑素佩等<sup>[5]</sup>在熵稳定格式中利用不同高阶重构得到高精度熵稳定格式。吕梦迪等<sup>[6]</sup>采用五阶 CWENO<sup>[7]</sup>重构得到一种新的熵稳定算法。胡立军等<sup>[8]</sup>采用通量分裂方法对此类方程求解。除此之外, 网格的分布对数值结果的好坏有着较大的影响, Harten 等<sup>[9]</sup>对移动网格法的发展做出了较大贡献, 这一方法优势在于对网格的有效利用, 在物理解变化较大的区域网格自动加密, 反之网格自动稀疏。到目前为止, 该方法的发展已取得较多成果。杨继明<sup>[10]</sup>对求解奇异摄动问题的移动网格

算法进行了研究。根据 Tang 等<sup>[11]</sup>提出的自适应移动网格法, 文献<sup>[12, 13]</sup>基于移动网格的熵稳定格式对双曲型守恒律方程进行了求解。

近年来, 神经网络得到了快速发展, Lagaris 等<sup>[14]</sup>提出了一种用人工神经网络求解初边值问题的方法; Yohai 等<sup>[15]</sup>提出一种基于已有方程的数值解对偏微分方程优化逼近的方法; 张琪<sup>[16]</sup>提出了一种训练基于物理知识的神经网络求解偏微分方程的新方法。

传统数值算法在间断附近, 结果常会存在伪振荡或过度抹平现象。本文基于机器学习框架下的 BP 神经网络训练现有数值方法中的函数值, 给出一种求解双曲守恒律方程数值解的新算法, 用于提高数值结果的分辨率和避免数值伪振荡的产生, 数值结果表明新算法具有鲁棒性强和分辨率高的特点。

## 2 BP 神经网络

### 2.1 算法描述

BP 神经网络是一种根据误差反向传播训练的多层前馈神经网络, 其基本思想<sup>[17]</sup>为, 学习过程由正向传播与反向传播组成, 根据隐含层每个神经元的输入与输出, 得到输出层的输入与输出, 再将网络输出与期望输出进行对比, 若正向传播的输出结果误差达到理想误差, 则停止计算, 否则利用梯度下降法优化误差, 计算出各层的权重与阈值的修正项后继续反向传播, 重复迭代。

如图 1 所示, 一个三层的 BP 神经网络, 用  $i, j$

收稿日期: 2021-03-09; 修改稿收到日期: 2021-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金(11971075); 陕西省自然科学基金青年项目(2020JQ-338; 2020JQ-342)资助项目.

作者简介: 郑素佩\* (1978-), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师 (E-mail: zsp2008@chd.edu.cn).

和  $k$  分别表示各层数据节点。学习过程如下。

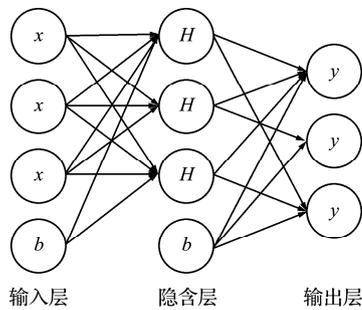


图1 BP神经网络结构  
Fig. 1 BP neural network structure

### (1) 正向传播

设隐含层的输入数据和输出数据分别为  $H_{\text{input}}$  和  $H_{\text{output}}$ , 输入层和隐含层权值为  $W_{ij}$ , 隐含层与输出层的权值为  $W_{jk}$ , 隐含层和输出层的阈值分别为  $b_1$  和  $b_2$ , 激活函数为  $f$ , 则

$$H_{\text{input}j} = \sum W_{ij} x_i - b_{1j}, H_{\text{output}j} = f(H_{\text{input}j})$$

设输出层的输入数据和输出数据分别为  $E$  和  $Y$ , 则

$$E_k = \sum W_{jk} H_{\text{output}j} - b_{2k}, Y_k = f(E_k)$$

网络误差  $D$  表示为

$$D = \frac{1}{2} \sum (D_k - Y_k)^2$$

### (2) 反向传播

对于输出层和隐含层的节点, 修正项分别为

$$\delta_k = (A_k - Y_k) Y_k (1 - Y_k)$$

$$\delta_j = H_{\text{output}j} (1 - H_{\text{output}j}) \sum \delta_k W_{jk}$$

假设学习率为  $\eta$ , 反向修正后隐含层和输出层的权值和阈值为

$W_{jk(n+1)} = W_{jk(n)} + \eta \delta_k H_{\text{output}j}$ ,  $b_{2(n+1)} = b_{2(n)} + \eta \delta_k$   
反向修正后输入层与隐含层的权值和阈值为

$$W_{ij(n+1)} = W_{ij(n)} + \eta \delta_j x_i, b_{1(n+1)} = b_{1(n)} + \eta \delta_j$$

对上述过程进行循环迭代, 直至达到理想误差。

## 2.2 数据集的构造

将熵稳定格式和基于移动网格的熵稳定格式作为已知数值格式(具体在第3节给出), 采用已知格式的低分辨率网格点数据作为网络输入, 其中一种高分辨率网格点数据作为期望输出, 构造训练集时, 用时间方向的多层输入数据表示。构造预测集时, 用任一给定时间层的网格点数据表示(具体构造在算例中说明)。

## 2.3 网络模型

BP神经网络求解双曲守恒律方程时, 使用均方误差定义损失函数, 网络训练时均采用 trainlm

函数, 网络模型包含两个隐层对输入数据进行非线性处理, 在求解中设置隐层神经元个数分别为 23 和 18, 激活函数为双曲正切函数, 其表达式为

$$\tanh x = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$$

网络训练与预测流程如图2所示。

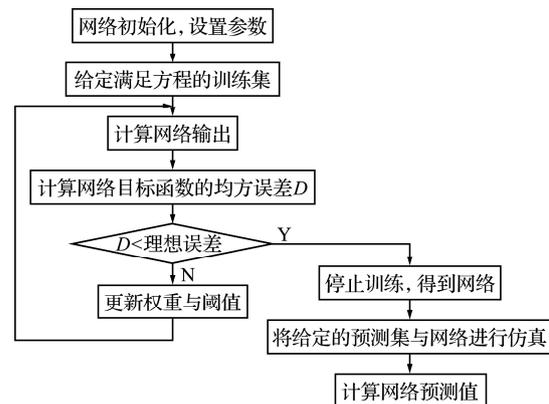


图2 网络训练与预测流程  
Fig. 2 Flow chart of network training and prediction

## 3 数值算法

### 3.1 熵稳定格式

一维双曲守恒律方程

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (1)$$

式中  $U = U(x, t) \in R^m$  为守恒变量,  $F(U)$  为通量, 式(1)的半离散格式为

$$\frac{d}{dt} U_i(t) = - \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x_i} \quad (2)$$

式中  $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $U_i(t)$  为  $U(x, t)$  在网格单元  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  的单元平均,  $F_{i+1/2}$  为与  $F(U)$  相容的数值通量。方程(1)的熵稳定格式参见文献[1]。

### 3.2 移动网格法

定义物理区域  $\Omega_p$  和逻辑区域  $\Omega_c$  存在一一对应的映射, 即  $x = x(\xi)$ ,  $\xi \in \Omega_c$ ,  $x \in \Omega_p$ , 首先, 对式(2)中心差分格式离散化, 并采用 Gauss-Seidel 迭代求解方程实现网络的更新

$$\omega(u_{j+1/2}^{[v]})(x_{j+1}^{[v]} - x_j^{[v+1]}) - \omega(u_{j-1/2}^{[v]})(x_j^{[v+1]} - x_{j-1}^{[v+1]}) = 0$$

其次, 采用守恒型插值公式实现解的更新

$$\tilde{u}_{j+1/2} = \frac{\Delta x_{i+1/2} u_{i+1/2} - [(cu)_{j+1} - (cu)_j]}{\Delta \tilde{x}_{j+1/2}}$$

最后, 为减少数值解误差, 选取如下低通滤波器使网格函数更光滑, 参见文献[11]。

$$\omega \leftarrow 0.5\omega_i + 0.25(\omega_{i-1} - \omega_{i+1})$$

### 4 数值算例

本节先说明数据的选择,再通过不同数值算例结果来验证新方法的性能。

假设方程(1)取  $N$  个网格点计算时间  $T$ , 每个时间层均选用熵稳定格式和移动网格法计算节点处函数值,将  $T$  的前  $m$  个时间层所得的各个节点处计算函数值作为网络输入,将对应时间层的高分辨率数值格式的计算函数值作为网络输出,其中这两组数据集作为训练集。同样将该时间层  $T$  采用熵稳定格式和移动网格法的计算函数值作为预测集。

**算例 1** 考虑一维线性对流方程满足间断初始条件

$$u_t + au_x = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1.0 & (0.2 \leq x \leq 0.4) \\ 0.0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

取 100 个网格点计算时间  $t = 0.5$ , CFL 条件数为 0.25。该算例的准确解含有激波,图 3(a,b) 分别给出了熵稳定格式和移动网格法的结果比较,图 3(c)是由 50 个时间层的数据训练结果与当前时间层数据仿真预测的结果,可以看出,新方法在间断位置计算结果明显比已有算法好,神经网络很好地学习到方程的结构并捕捉到激波,与参考解非常接近。图 3(d)给出了网络收敛性能,若目标精度为  $1 \times 10^{-5}$ ,则神经网络在迭代 393 次后误差精度达到  $5.2257 \times 10^{-6}$ ,性能良好。

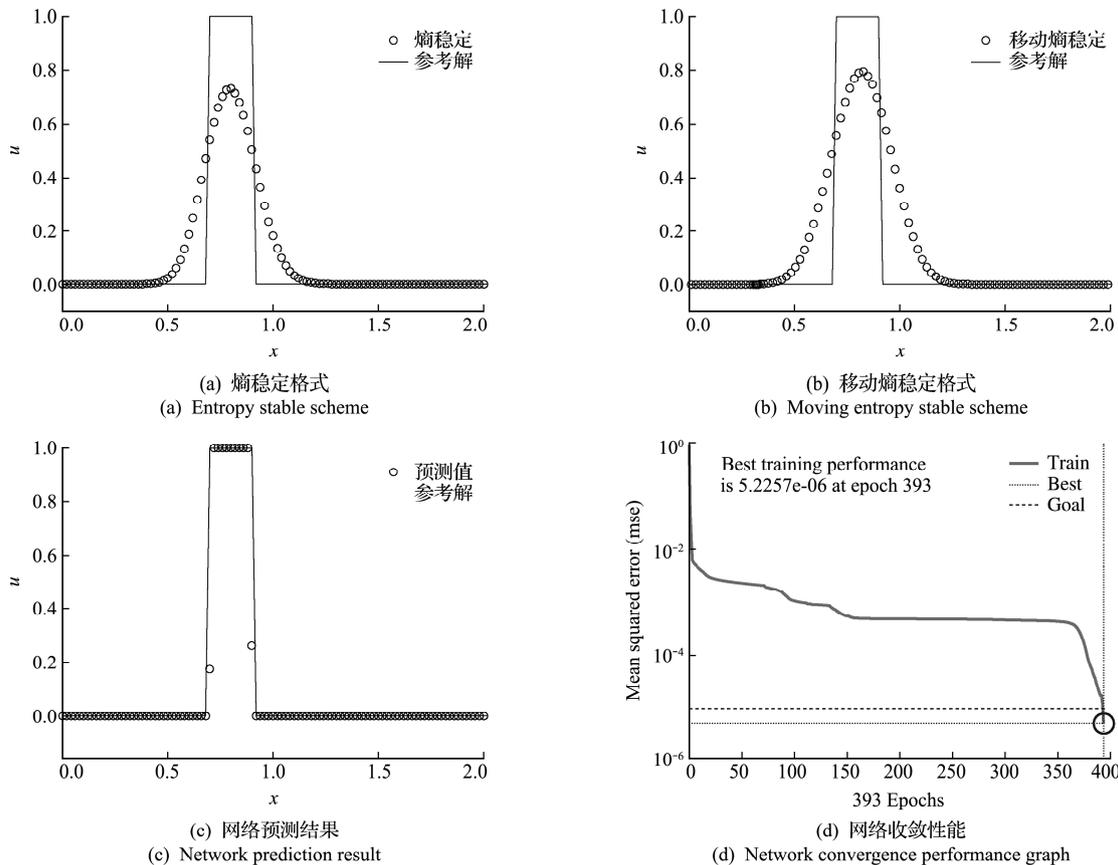


图 3 算例 1 的数值结果与损失函数变化  
Fig. 3 Numerical results of example 1 and variation diagram of loss function

**算例 2** 考虑一维无粘 Burgers 方程满足间断初始条件

$$u_t + (u^2/2)_x = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1/3) \\ -1 & (1/3 \leq |x| \leq 1) \end{cases}$$

取 100 个网格点计算时间  $t = 0.3$ , CFL 条件数为 0.2。该算例的准确解是由稀疏波和激波两部分组成,图 4(a,b) 分别给出了熵稳定格式和移

动网格法的结果比较,图 4(c)是由 40 个时间层的数据训练结果与当前时间层数据仿真所预测的结果,可以看出,新方法在激波和稀疏波间断位置的结果与参考解误差很小,对已有格式的抹平现象明显改善。图 4(d)给出了网络收敛性能,若目标精度为  $1 \times 10^{-5}$ ,则神经网络在迭代 232 次后误差精度达到  $8.6412 \times 10^{-6}$ ,性能良好。

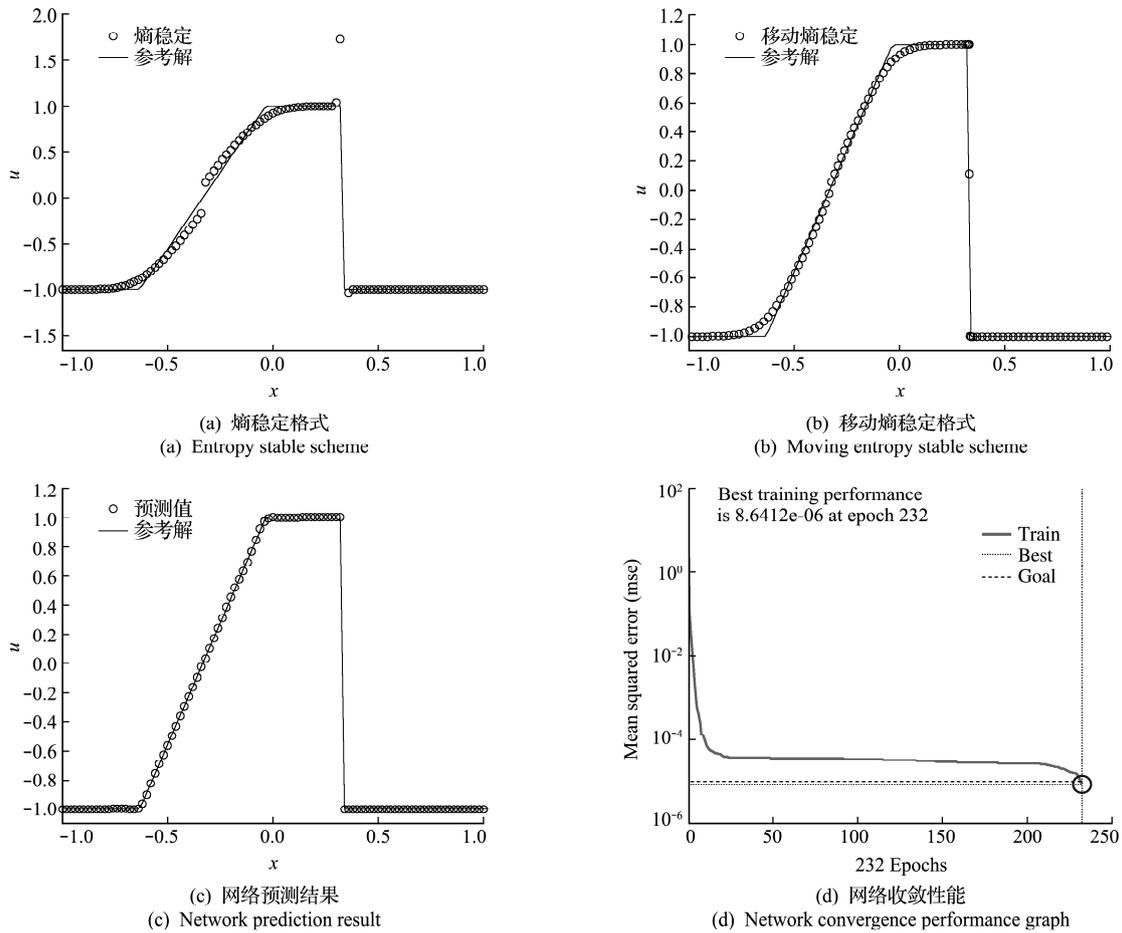


图4 算例2的数值结果与损失函数变化  
Fig. 4 Numerical results of example 2 and variation diagram of loss function

**算例3** 考虑一维无粘 Burgers 方程压缩波满足间断初始条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ -0.5 \sin \pi x & (|x| < 1) \end{cases}$$

取 100 个网格点计算时间  $t = 0.96$ , CFL 条件数为 0.2, 采取周期边界条件, 该问题的准确解含有间断, 产生了激波, 图 5(a, b) 分别给出了熵稳定格式和移动熵稳定格式结果比较, 图 5(c) 是由 40 个时间层的数据训练结果与当前时间层数据仿真预测的结果, 可以看出, 该方法的计算结果既保持已有算法在光滑区域的良好数值解, 又可以根据多个时间层数据学习到方程的结构, 在间断位置比熵稳定格式和移动熵稳定格式更接近于参考解, 结果更准确。图 5(d) 给出了网络收敛性能, 若目标精度为  $1 \times 10^{-5}$ , 则神经网络在迭代 211 次后误差精度达到  $9.857 \times 10^{-6}$ , 性能良好。

**算例4** 一维带源项浅水波方程在间断底部上的溃坝问题

$$U_t + F(U)_x = -S, S = \begin{bmatrix} 0 \\ ghb_x \end{bmatrix}$$

计算区间  $[0, 150]$ , 初始条件和底部地势函数分别为

$$b(x) = \begin{cases} 0.8 & (|x - 75| \leq 18.75) \\ 0 & (|x - 75| > 18.75) \end{cases}$$

$$h(x, 0) = \begin{cases} 10 - b(x) & (0 \leq x \leq 75) \\ 2 - b(x) & (x > 75) \end{cases}$$

$$u(x, 0) = 0$$

取 200 个网格点计算时间  $t = 4.5$ , CFL 条件数为 0.1,  $g = 0.98$ , 采用周期性边界条件。该算例的准确解是由稀疏波和激波两部分组成, 可以看出, 图 6(a, b) 分别给出了熵稳定格式和移动网格法的结果比较, 图 6(c) 是由 40 个时间层的数据训练结果与当前时间层数据仿真预测的结果, 在间断位置预测解可以自动识别, 结果比熵稳定格式和移动熵稳定格式更贴近参考解。图 6(d) 给出了网络收敛性能, 若目标精度为  $1 \times 10^{-5}$ , 则神经网络在迭代 324 次后误差精度达到  $5.3882 \times 10^{-5}$ , 性能良好。

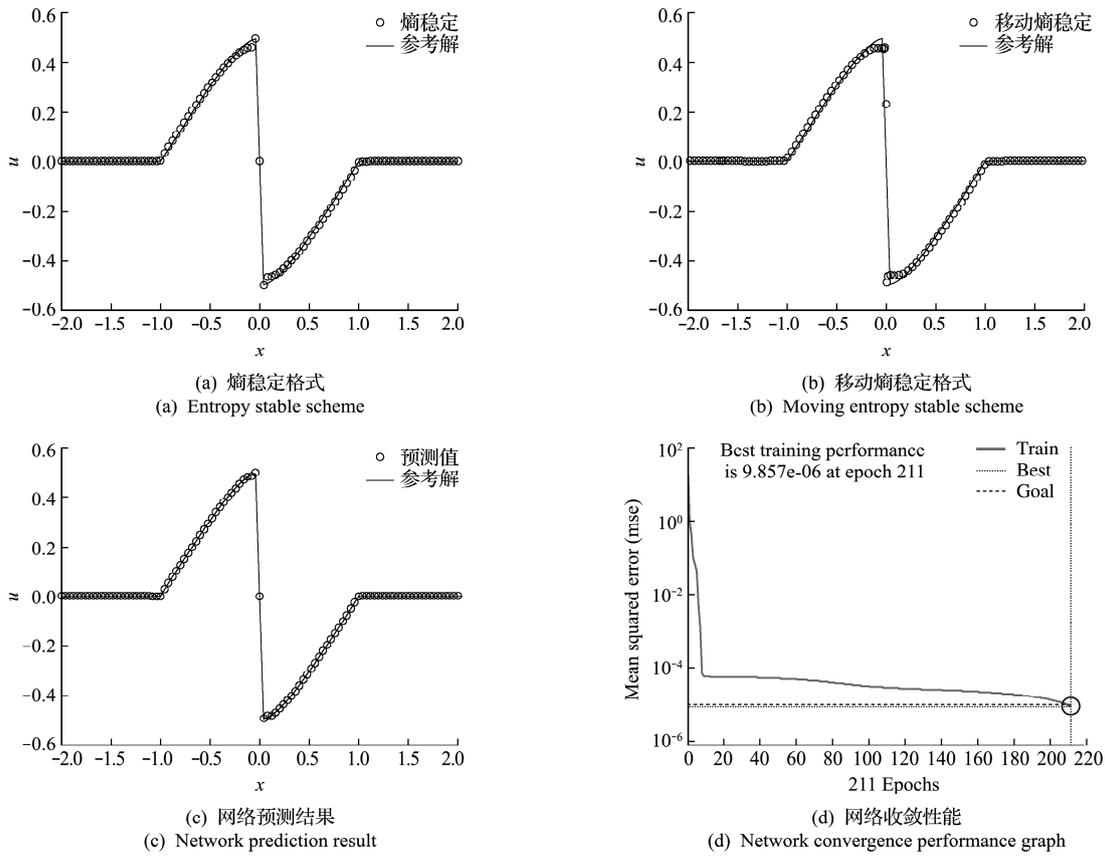


图5 算例3的数值结果与损失函数变化  
Fig. 5 Numerical results of example 3 and variation diagram of loss function

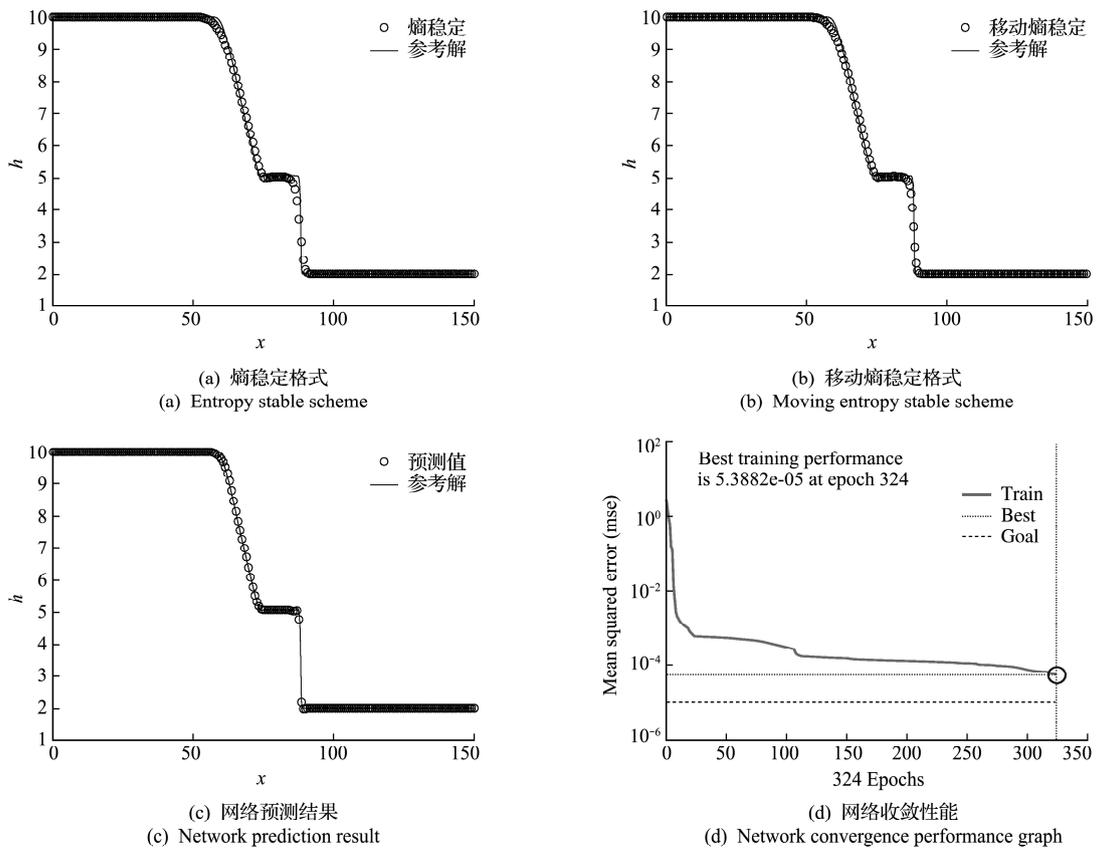


图6 算例4的数值结果与损失函数变化  
Fig. 6 Numerical results of example 4 and variation diagram of loss function

**算例 5** 一维带源项浅水波方程捕捉稳态水中出现的微小扰动问题

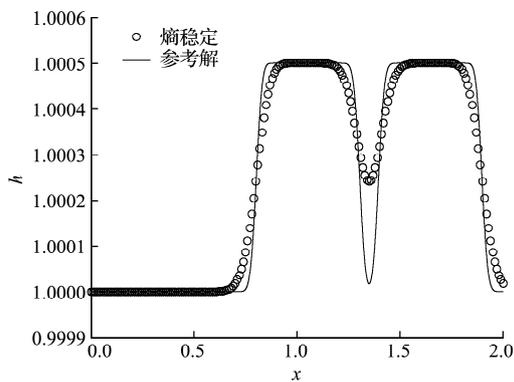
计算区间 $[0, 2]$ , 初始条件和连续形函数分别为

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1 - b(x) + \xi & (1.1 \leq x \leq 1.6) \\ 1 - b(x) & (\text{其他}) \end{cases}$$

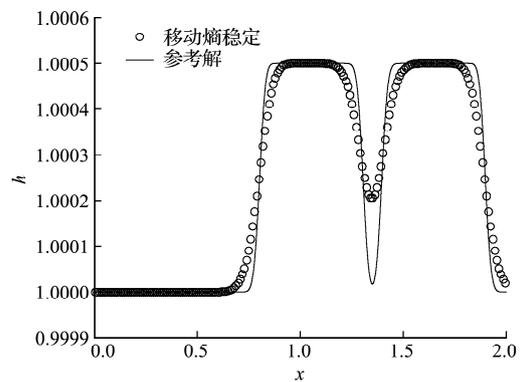
$$b(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \{ \cos[10\pi(x - 1.5)] + 1 \} & (1.4 \leq x \leq 1.6) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

$$hu(x, 0) = 0$$

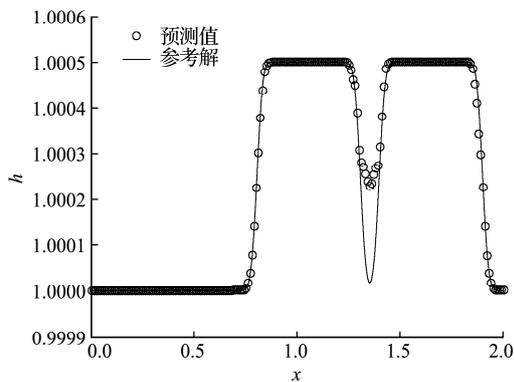
取 200 个网格点计算时间  $t = 0.3$ , CFL 条件数为 0.45, 其中  $g = 0.98$ ,  $\xi = 0.001$ , 采用周期性边界条件。该算例是一个连续问题, 图 7(a, b) 分别给出了熵稳定格式和移动网格法的结果比较, 图 7(c) 是由 40 个时间层的数据训练结果与当前时间层数据仿真预测的结果, 可以看出采用新方法求解连续问题时, 在斜率变化较大和斜率为零的位置新方法计算结果更好, 更接近参考解。图 7(d) 给出了网络收敛性能, 若目标精度为  $1 \times 10^{-5}$ , 则神经网络在迭代 306 次后误差精度达到  $9.9931 \times 10^{-6}$ , 性能良好。



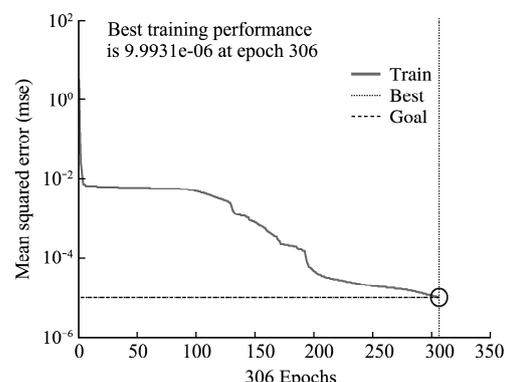
(a) 熵稳定格式  
(a) Entropy stable scheme



(b) 移动熵稳定格式  
(b) Moving entropy stable scheme



(c) 网络预测结果  
(c) Network prediction result



(d) 网络收敛性能  
(d) Network convergence performance graph

图 7 算例 5 的数值结果与损失函数变化

Fig. 7 Numerical results of example 5 and variation diagram of loss function

## 5 结论

本文采用熵稳定格式和移动熵稳定格式两种经典的数值方法, 结合 BP 神经网络得到一种新的求解双曲守恒律方程的数值方法。数值实验表明, 该方法经过多次训练与网络仿真, 结果可自动识别斜率较大位置和间断位置, 既适用于连续问题也适用于间断问题的求解。研究表明, 数据集的选取对

结果有较大影响, 应选自稳定的格式, 而本文所选的熵稳定格式在连续位置数值结果良好。该方法可根据所选多个时间层的数据预测其他待求时刻节点处的数据。

## 参考文献 (References):

[1] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I [J].

- Mathematics of Computation*, 1987, **49**(179):91-103.
- [2] Ismail F, Roe P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks [J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(15):5410-5436.
- [3] Fjordholm U S, Mishra S, Tadmor E. Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially non-oscillatory schemes for systems of conservation laws [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012, **50**(2):544-573.
- [4] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **71**(2):231-303.
- [5] 郑素佩, 封建湖, 刘彩侠. 高分辨率熵相容算法在二维溃坝问题中的应用[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2013, **28**(5):545-551. (ZHENG Su-pei, FENG Jian-hu, LIU Cai-xia. High-resolution entropy consistent algorithm for the two-dimensional dam-break flows [J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2013, **28**(5):545-551. (in Chinese))
- [6] 吕梦迪, 郑素佩, 陈芳. 五阶高分辨率熵稳定算法[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2018, **31**(2):191-196. (LÜ Meng-di, ZHENG Su-pei, CHEN Fang. Fifth-order high-resolution entropy stable algorithm [J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, **31**(2):191-196. (in Chinese))
- [7] Levy D, Puppo G, Russo G. A fourth-order central WENO scheme for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002, **24**(2):480-506.
- [8] 胡立军, 翟健, 袁礼. 求解可压缩流的二维通量分裂格式[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(2):247-253. (HU Li-jun, ZHAI Jian, YUAN Li. A two-dimensional flux splitting scheme for compressible flows [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(2):247-253. (in Chinese))
- [9] Harten A, Hyman J M. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, **50**(2):235-269.
- [10] 杨继明. 奇异摄动问题自适应移动网格迭代算法研究[D]. 湘潭大学, 2004. (YANG Ji-ming. Adaptive Moving Mesh Iterative Methods for Singularly Perturbed Problems [D]. Xiangtan University, 2004. (in Chinese))
- [11] Tang H Z, Tang T. Adaptive mesh methods for one-and two-dimensional hyperbolic conservation laws [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2003, **41**(2):487-515.
- [12] 程晓晗, 聂玉峰, 蔡力, 等. 基于移动网格的熵稳定格式[J]. 计算物理, 2017, **34**(2):175-182. (CHENG Xiao-han, NIE Yu-feng, CAI Li, et al. Entropy stable scheme based on moving meshes for hyperbolic conservation laws [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2017, **34**(2):175-182. (in Chinese))
- [13] 王令, 郑素佩. 基于移动网格的熵稳定格式求解浅水波方程[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2020, **35**(2):188-193. (WANG Ling, ZHENG Su-pei. Solving shallow water wave equation based on moving grid entropy stable scheme [J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2020, **35**(2):188-193. (in Chinese))
- [14] Lagaris I E, Likas A, Fotiadis D I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1998, **9**(5):987-1000.
- [15] Bar-Sinai Y, Hoyer S, Hickey J, et al. Learning data-driven discretizations for partial differential equations [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2019, **116**(31):15344-15349.
- [16] 张琪. 深度学习在计算流体力学中的应用[D]. 东北师范大学, 2020. (ZHANG Qi. The Application of Deep Learning in Computational Fluid Mechanics [D]. Northeast Normal University, 2020. (in Chinese))
- [17] 王苗苗. 基于机器学习的短时交通流预测方法研究[D]. 长安大学, 2017. (WANG Miao-miao. Research on Short-Term Traffic Flow Forecasting Method Based on Machine Learning [D]. Chang'an University, 2017. (in Chinese))

## Application of machine learning in solving one-dimensional hyperbolic conservation law equation

ZHAO Qing-yu, ZHENG Su-pei\*, LI Xiao

(College of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** The hyperbolic conservation equation is of great significance in the calculation of aerodynamics, physics, oceanography and many other fields. In this paper, the BP neural network based on a machine learning framework is applied to solve the hyperbolic conservation equation approximately. First of all, the algorithm constructs the network input from the numerical solutions of multiple time layers obtained from the entropy stable scheme and based on the adaptive moving grid, and uses the numerical solution of the corresponding multiple time layers obtained by the high-resolution entropy stable scheme to construct the network output, and the data set is normalized. Then, using the training data of three-layer BP neural network, the neural network with good performance is obtained, so as to realize the prediction of the numerical solutions at any given time level node. Finally, five numerical examples show that the algorithm is suitable for solving this kind of problems, and it has high resolution with no physical oscillations.

**Key words:** hyperbolic conservation law equation; machine learning; BP neural network; entropy stable scheme; adaptive moving grid

---

引用本文/Cite this paper:

赵青宇, 郑素佩, 李 霄. 机器学习在求解一维双曲守恒律方程中的应用[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(2): 229-236.

ZHAO Qing-yu, ZHENG Su-pei, LI Xiao. Application of machine learning in solving one-dimensional hyperbolic conservation law equation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(2): 229-236.