

# 考虑弯扭形变的薄壁箱形梁的非线性后屈曲

谭敏尧, 程文明\*

(西南交通大学 机械工程学院, 成都 610031)

**摘要:**在大位移和扭转的前提下,通过一中等弯曲扭转的位移场描述了薄壁箱形梁在偏心载荷作用下的静稳定性问题。该非线性公式可用于分析简支薄壁箱形梁在不同载荷作用下的屈曲和后屈曲行为。采用伽辽金方法将非线性微分系统离散,并通过牛顿-拉普森增量迭代法求解得代数方程组。数值计算结果表明,当前屈曲位移不可忽略时,经典的横向屈曲预测是保守的,而非线性屈曲的分析解更为可靠。其中考虑了载荷高度参数对非线性屈曲性能的影响,并将计算的屈曲响应结果与采用壳单元的有限元结果(ANSYS)进行了比较。

**关键词:**弯曲; 扭转; 非线性; 后屈曲

中图分类号:U448.213;O343.5

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2022)02-0222-07

## 1 引言

众所周知,薄壁箱形梁结构具有较强的承载能力,可以承受较大的位移和转动形变。在载荷作用下,薄壁箱形梁发生拉伸、弯曲和扭转耦合变形,这种变化的几何形状可能引起结构的非线性响应。因此,需要一种非线性理论来准确预测这种结构的行为。就圆柱壳的屈曲问题,Seleim 等<sup>[1]</sup>通过实验数据的研究,发现固支实验值与忽略前屈曲非线性效应的理论解之间存在 30% 左右的差别,并且更接近 Kendrick 理论的简支解。为了对薄壳屈曲和后屈曲行为有足够的认识,必须考虑前屈曲非线性效应的影响。因此,了解结构的后屈曲响应和极限荷载对设计者来说是至关重要的,这样可减轻梁结构的重量及提高其抗扭能力,使梁设计更为有效和经济。

为了更好地理解薄壁结构的行为,学者们提出了许多不同的屈曲和后屈曲分析公式和数值程序。Euler<sup>[2]</sup>第一个用曲率的精确表达式代替小挠度近似来研究柱的弹性屈曲和后屈曲行为。在对薄壁梁的早期研究中,文献[3-5]就几何非线性分析问题对薄壁梁进行了屈曲和后屈曲行为分析。Grimaldi 等<sup>[6]</sup>基于 Koiter 方法的摄动技术,研究了轴向荷载作用下梁的初始后屈曲行为。基于瑞利里兹降维法,Ghafari 等<sup>[7]</sup>对组合梁进行截面分析,将三维弹性问题简化为二维横截面分析,得到

横截面刚度常数。基于伽辽金方法,Kim 等<sup>[8]</sup>研究了考虑不同荷载条件下的单双对称简支梁的弯扭和横向后屈曲行为。Arruda 等<sup>[9]</sup>运用卡雷拉统一公式分析了梁的物理非线性模型的数值性能。Bebiano 等<sup>[10]</sup>扩展了广义梁理论公式的适用范围。张元海等<sup>[11]</sup>建立了轴向偏心荷载作用下薄壁箱梁约束扭转双力矩的广义内力公式。Kolakovski 等<sup>[12]</sup>利用转移矩阵法和 Godunov 正交化方法,给出了薄壁组合梁耦合屈曲问题的模态解方法。Szymczak 等<sup>[13]</sup>利用稳态总能量原理推导了控制非线性微分方程,用微扰法确定的方程近似解可以确定屈曲载荷和初始后屈曲行为。

本文的主要目的是验证所提非线性公式的准确性,并研究非线性对各向同性薄壁箱形梁的屈曲和后屈曲行为的影响。

## 2 薄壁箱形梁的运动学

### 2.1 基本假设

根据薄壁箱形梁的结构特点和受力特性,本文薄壁箱形梁的结构模型基于以下假设。

(1) 横截面轮廓在自身平面内为刚性,即不考虑畸变效应。

(2) 假设各向同性梁的翘曲分布为圣维南函数。

(3) 假设弯曲旋转( $y$  轴和  $z$  轴)适中,横截面扭转可以任意增大。

### 2.2 运动学方程

对于一般薄壁箱形梁,构件使用笛卡坐标系( $x, y, z$ ),其中  $x$  轴平行于梁的纵轴,其原点在剪切中心(SG),如图 1 所示。根据 Vlasov 的各向同

收稿日期:2020-08-18;修改稿收到日期:2021-04-28。

基金项目:国家自然科学基金面上项目(51675450)资助项目。

作者简介:程文明\*(1963-),男,博士,博士生导师。

性梁理论,每个截面单元厚度的中间为中间面。垂直于  $x$  轴的平面与中间平面相交于一条称为等高线的曲线。中间点  $M$  对应的坐标系为  $(n, s, x)$ ,其中  $s$  沿中面等高线,  $n$  垂直于  $s$ 。

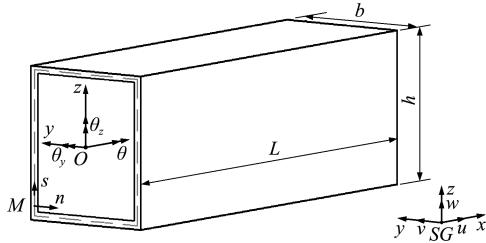


图 1 薄壁箱形梁截面和位移符号

Fig. 1 Thin-walled box beam cross-section and displacement symbols

根据假设提出薄壁箱形梁的结构模型,在广义坐标理论的基础上提出了运动学方程,即

$$u(x, s, n) = u_0 - \theta_y z(s) - \theta_z y(s) - \omega(s) \vartheta(x) \quad (1a)$$

$$v(x, s, n) = v - z'(s) \sin \theta - y'(s) (1 - \cos \theta) \quad (1b)$$

$$w(x, s, n) = w + y'(s) \sin \theta - z'(s) (1 - \cos \theta) \quad (1c)$$

根据广义坐标原理可知,广义位移  $u_0$  表示整个截面的纵向伸缩位移;  $\theta_y$  和  $\theta_z$  分别为截面  $x$  关于  $oy$  轴与  $oz$  轴的转角;  $\vartheta(x)$  为薄壁箱形梁截面的广义翘曲;  $v$  和  $w$  分别为截面各板绕  $x$  轴扭转时各点的切向位移和横向位移;  $\sin \theta$  和  $(1 - \cos \theta)$  为截面  $x$  关于  $oy$  轴与  $oz$  轴的线位移;  $\omega(x)$  则为薄壁箱形梁截面沿外轮廓线的广义翘曲变形,  $\omega = z(s)y(s)$ 。

忽略剪切挠性 ( $\theta_z = v'$ ,  $\theta_y = w'$  和  $\vartheta = \theta'$ ), 根据经典的 Vlasov 理论, 取  $\cos \theta = 1$  和  $\sin \theta = \theta$ , 不考虑非线性项, 对于剪切变形情况下的薄壁箱形梁的线性动力学, 位移场式(1)与 Cortínez 等<sup>[14]</sup>给出的位移场一致。任意点  $M$  的位移场为

$$u_M = u_0 - w'z - v'y - \omega\theta' \quad (2a)$$

$$v_M = v - (z - z_0)\theta \quad (2b)$$

$$w_M = w + (y - y_0)\theta \quad (2c)$$

式中  $(y_0, z_0)$  为关于剪切中心的形心坐标。根据本文假设, 式(1)是位移和扭转耦合的, 允许考虑大扭转和缩短效应, 一般从其他模型直接衍生而来。式(2)只适用于小扭转的情况, 基于 Vlasov 的关系, 扭转角较小, 平衡扭转方程为线性, 一般忽略了缩短效应。这种方法更为普遍, 本文采用这种方法。

对于薄壁箱形梁, 可以将包含大位移的格林应变张量的分量简化为

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3a)$$

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3b)$$

$$\gamma_{xn} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3c)$$

将式(2)代入式(3)可得

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u' - y(v'' + w''\theta) - z(w'' - v''\theta) - \\ &\quad \omega\theta'' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + R^2\theta'^2) - \\ &\quad y_0\theta'(w' - v'\theta) + z_0\theta'(v' + w'\theta) \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\gamma_{xs} = -\frac{1}{2}(z - z_0 + \frac{\partial \omega}{\partial s})\theta' \quad (4b)$$

$$\gamma_{xn} = -\frac{1}{2}(y - y_0 + \frac{\partial \omega}{\partial n})\theta' \quad (4c)$$

$$\text{式中 } R^2 = (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad (5)$$

由这些表达式可知, 式(4a)给出的轴向应变  $\epsilon_{xx}$  的非线性依赖于未知量( $u, w, v$  和  $\theta$ )。在 Valasov 近似方程组(2)的情况下, 只有轴向应变的高阶项是非线性的。这使得平衡方程和内力关系极大简化。

### 3 非线性屈曲模型

#### 3.1 弯扭状态下的平衡方程

根据总势能的平衡条件得到平衡方程为

$$\delta(W - U) = 0 \quad (6)$$

式中  $\delta$  为虚变分。 $U$  和  $W$  分别为应变能和外载荷功。应变能的表达式为

$$\delta U = \int_L \int_A (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + 2\tau_{xs} \delta \gamma_{xs} + 2\tau_{xn} \delta \gamma_{xn}) dA dx \quad (7)$$

式中  $\sigma_{xx}, \gamma_{xs}$  和  $\gamma_{xn}$  为 Piola-Kirchhoff 应力张量。

将式(4,5)代入式(7), 应变张量分量的变化为

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{xx} &= \delta u' - y(\delta v'' + \theta \delta w'') - y(w'' - v''\theta) \delta \theta - \\ &\quad z(\delta w'' - \theta \delta v'') - \omega \delta \theta'' + z(v'' + w''\theta) \delta \theta + \\ &\quad \delta v'(v' + y_0\theta\theta' + z_0\theta') + \\ &\quad \delta w'(w' + z_0\theta\theta' - y_0\theta') + \\ &\quad \delta \theta'[R^2\theta' + y_0(-w' + v'\theta') + z_0(v' + w'\theta')] + \\ &\quad \delta \theta[y_0(w'\theta\theta') + v'\theta' + z_0(w'\theta' - v'\theta')] \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\delta \gamma_{xs} = -\frac{1}{2}(z - z_0 + \frac{\partial \omega}{\partial s})\delta \theta' \quad (8b)$$

$$\delta \gamma_{xn} = -\frac{1}{2}(y - y_0 + \frac{\partial \omega}{\partial n})\delta \theta' \quad (8c)$$

在弹性行为下, 应变能的变化可以表示为在变形状态下薄壁单元截面上的内力函数, 即

$$\begin{aligned} N &= \iint_A \sigma_{xx} dA, M_y = \iint_A \sigma_{xx} z dA, M_z = \iint_A \sigma_{xx} y dA \\ M_{sv} &= \iint_A \left[ \tau_{xs} \left( y - y_0 - \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) - \tau_{xn} \left( z - z_0 - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \right] dA \\ M_R &= - \iint_A \sigma_{xx} R^2 dA, B_\omega = - \iint_A \sigma_{xx} \omega dA \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $N$  为轴向力,  $M_y$  和  $M_z$  分别为关于  $z$  轴和  $y$  轴的弯矩,  $M_{sv}$  为圣维南扭矩,  $B_\omega$  为双力矩,  $M_R$  为高阶应力合力矩。

将式(9)代入应变能公式得

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_L N [\delta u' + \delta v' (v' + y_0 \theta \theta' + z_0 \theta') + \\ & \delta w' (w' + z_0 \theta \theta' - y_0 \theta')] dx + \\ & \int_L M_R \theta' \delta \theta' dx + \int_L N \delta \theta [y_0 (w' \theta \theta' + v' \theta') + \\ & z_0 (w' \theta' + v' \theta')] dx + \\ & \int_L N \delta \theta' [y_0 (-w' + v' \theta') + z_0 (w' \theta' + v')] dx + \\ & \int_L M_{sv} \delta \theta' dx - \int_L M_y \delta \theta (w'' \theta + v'') dx + \\ & \int_L B_\omega \delta \theta'' dx + \int_L M_z (\delta v'' + \theta \delta w'') dx + \\ & \int_L M_z \delta \theta (w'' - v'' \theta) dx - \int_L M_y (\delta w'' - \theta \delta v'') dx \end{aligned} \quad (10)$$

本文首先考虑了梁绕主轴弯曲时的横向屈曲, 然后, 在截面轮廓的点  $M$  上, 施加的荷载为垂直分布荷载  $q_z$ , 如图 2 所示。

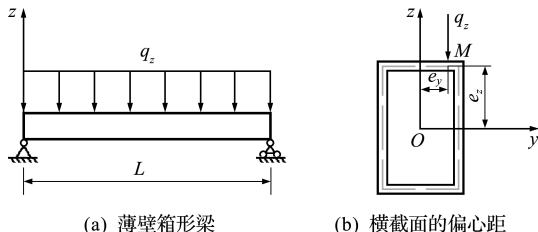


图 2 施加分布载荷  $q_z$  的薄壁箱形梁及横截面的偏心距  
Fig. 2 Thin-walled box beam applying distributed load and eccentricity of cross-section

外部所做功  $W$  由以下关系定义。

$$W = \int_L q_z w_M dx \quad (11)$$

$$w_M = w + e_y \sin \theta - e_z (1 - \cos \theta) \quad (12)$$

式中  $e_y = y_M - y_0$ ,  $e_z = z_M - z_0$  为偏心距。将式(12)代入式(11), 偏微分方程可得

$$\delta W = \int_L q_z (e_y \cos \theta - e_z \sin \theta) \delta \theta dx + \int_L q_z \delta w dx \quad (13)$$

根据式(10, 13)的关系, 对总势能(6)的虚位移及其导数的函数进行分部积分, 得到的表达式只取

决于虚位移  $\delta u, \delta v, \delta w$  和  $\delta \theta$ 。由平衡条件得平衡方程为

$$N' = 0 \quad (14a)$$

$$M_z'' + (M_y \theta)'' - N [v'_0 + (y_0 \theta + z_0) \theta']' = 0 \quad (14b)$$

$$-M_y'' + (M_z \theta)'' - N [w'_0 - (y_0 - z_0) \theta']' = q_z \quad (14c)$$

$$\begin{aligned} B_\omega'' - M_{sv}' - M_y (w'' \theta + v'') + M_z (w'' - v'' \theta) - \\ N z_0 (v' + w' \theta) + N (y_0 \theta' (v' + w' \theta) + \\ z_0 \theta' (w'' - v'' \theta)) - (M_R \theta')' - \\ N y_0 (-w' + v' \theta)' = q_z (e_y - e_z \theta) \end{aligned} \quad (14d)$$

这些方程的建立不需要任何的简化假设, 都是非线性和强耦合的。

### 3.2 薄壁箱形梁的后屈曲方程

对于薄壁箱形梁的后屈曲问题, 引入经典弯曲理论, 在平衡方程中, 非线性项保守到 3 阶 ( $v^3, w^3, \theta^3, v^2 \theta, \dots$ )。此外, 在横向屈曲分析中, 未考虑贡献的轴向荷载  $N$ 。经过计算, 两种弯曲和扭转平衡方程为

$$\begin{aligned} EI_z (v^{IV} + 3v'v''v''' + v''^2 + \frac{v^{IV}v'^2}{2}) + (EI_z - EI_y) \times \\ (w^{IV}\theta + 2w''\theta + w''\theta'' - v^{IV}\theta^2 - \\ 4v''\theta\theta' - 2v''\theta\theta'' - 2v''\theta'^2) = 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} EI_y (w^{IV} + 3w'w''w''' + w''^2 + \frac{w^{IV}w'^2}{2}) + \\ (EI_z - EI_y) (v''w'' - v''^2\theta + w''^2\theta) + EI_\omega \theta^{IV} - \\ GK\theta'' - \frac{3}{2}EI_\omega \theta'^2\theta'' = q_z (e_y - e_z \theta) \end{aligned} \quad (15c)$$

式中  $(\cdot)^{IV}$  为对  $x$  的 4 阶导数(如  $w^{IV} = \partial^4 w / \partial x^4$ ),  $A$  为横截面积,  $I_y, I_z, I_\omega$  和  $K$  为截面几何特征惯性矩。 $I_0$  为关于剪切中心的极转动惯量,  $I_R$  是关于剪切中心的第四惯性矩,  $I_t$  为高阶扭转的几何参数常数, 其表达式为

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_A y^2 dA, I_z = \iint_A z^2 dA, I_\omega = \iint_A \omega^2 dA \\ I_R &= \iint_A [(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] dA \\ I_0 &= (I_y + I_z)/A + y_0^2 + z_0^2, I_t = I_R - A I_0^2 \end{aligned} \quad (16)$$

由弯扭平衡方程(15)得到扭转角  $\theta$  的一个立方项。外载荷  $q_z$  对扭转平衡方程的贡献是偏心量的函数。竖向载荷  $q_z$  通过剪切中心施加时, 偏心位移  $e_y$  为零。在梁上应用一个扭矩, 其是  $e_z$  的函数, 通常称为载荷高度参数。非线性微分方程组(15)可以研究任意边界条件下薄壁箱形梁的弯扭非线性行为。可以看出, 所有平衡方程式都是耦合的, 且耦合条件正比于主要惯性矩( $I_z - I_y$ ), 最后将

这一项简化为几何比  $I_z/I_y$ 。在线性稳定性分析中,其影响自然忽略。在3.3节中,将考虑梁在简支边界条件下的非线性行为。

### 3.3 薄壁箱形梁的代数平衡方程

对于具有自由翘曲的简支梁,弯曲和扭转时的位移模态近似为正弦函数。

$$\frac{v(x)}{v_0} = \frac{w(x)}{w_0} = \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (17)$$

式中  $v_0, w_0$  和  $\theta_0$  为相对位移振幅。为了实现非线性系统,采用伽辽金近似法对控制方程进行了简化。通过积分计算,得到三个代数耦合平衡方程为

$$(P_z - P_y) \left( \frac{8}{3\pi} w_0 \theta_0 - \frac{3}{4} v_0 \theta_0^2 \right) + P_z \left( v_0 + \frac{\pi^2}{8L^2} w_0^3 \right) = 0 \quad (18)$$

$$(P_z - P_y) \left( \frac{8}{3\pi} v_0 \theta_0 + \frac{3}{4} w_0 \theta_0^2 \right) +$$

$$|K_t| = \begin{vmatrix} P_z & 0 & \\ 0 & P_y & \\ \frac{8}{3\pi} (P_z - P_y) w_0 & 0 & \frac{EI_\omega \pi^2}{L^2} + GK + \frac{3}{4} (P_z - P_y) w_0^2 + \frac{8}{\pi^2} M_0 e_z \end{vmatrix}$$

当荷载  $q_z$  或等效弯矩  $M_0$  无偏心率时,梁的变形随荷载的增大而增大。梁的前屈曲状态,也称为基本状态。当达到临界屈曲荷载时,梁的行为是弯扭的。基本状态下的位移分量  $(v_0, w_0, \theta_0)$  定义为  $(0, w_0, 0)$ 。屈曲载荷由切线刚度矩阵  $[K_t]$  计算。由该方程可得到失稳荷载或等效相关弯矩  $M_0$ 。可以看出,  $[K_t]$  在式(22)的第一、二、三行不耦合,忽略  $w_0$  的高阶项,由式(19)得到  $w_0$  作为  $M_0$  函数的近似表达式为

$$w_0 = 32M_0 / (\pi^3 P_y) \quad (23)$$

根据式(21)将上述关系简化,代入式(23),得到  $M_0$  的临界值。

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ (C_2 e_z) \pm \sqrt{(C_2 e_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left( 1 + \frac{GKL^2}{EI_\omega \pi^2} \right)} \right] \quad (24)$$

式中 系数  $C_1$  和  $C_2$  可表示为

$$C_1 = 1.14 \sqrt{1 - \frac{I_z}{I_y}}, \quad C_2 = 0.46 \sqrt{1 - \frac{I_z}{I_y}} \quad (25)$$

根据线性稳定性分析中建立的模型,通过文献 [15,16] 得到类似表达式,常系数  $C_1$  和  $C_2$  分别为  $C_1 = 1.14, C_2 = 0.46$ 。在前屈曲挠度的影响下,这些系数不是恒定的,而是取决于几何比  $I_z/I_y$ ,指出了梁在均匀弯曲情况下的前屈曲挠度对梁横向屈

$$P_y \left( w_0 + \frac{\pi^2}{8L^2} w_0^3 \right) = \frac{32}{\pi^3} M_0 \quad (19)$$

$$(P_z - P_y) \left( \frac{8}{3\pi} w_0 v_0 - \frac{3}{4} \theta_0 v_0^2 + \frac{3}{4} \theta_0 w_0^2 \right) + \frac{3EI_\omega \pi^2}{8L^2} \theta_0^3 + \left( GK + \frac{EI_\omega \pi^2}{L^2} \right) \theta_0 = \left( \frac{32}{\pi^3} e_y - \frac{8}{\pi^2} e_z \theta_0 \right) M_0 \quad (20)$$

在这些代数方程中,  $M_0$  为薄壁箱形梁梁长中点的最大弯矩,  $P_y$  和  $P_z$  为简支梁的欧拉屈曲载荷。其关系可以表达为

$$M_0 = \frac{q_z L^2}{4}, \quad P_y = \frac{E \pi^2 I_y}{L^2}, \quad P_z = \frac{E \pi^2 I_z}{L^2} \quad (21)$$

调节平衡方程式(18~20)具有较强的非线性和耦合性,不能得到任意的解。采用数值计算方法牛顿-拉普森法进行求解。

$$|K_t| = \begin{vmatrix} \frac{8}{3\pi} (P_z - P_y) w_0 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{8}{3\pi} (P_z - P_y) w_0^2 + \frac{8}{\pi^2} M_0 e_z \end{vmatrix} \quad (22)$$

曲的重要性。

对于不同载荷条件(分布载荷  $q_z$  和集中载荷  $P$ ),采用类似方法,可得到等效弯矩的统一简单公式为

$$M_{cr} = \begin{cases} q_z L^2 / 8 & \text{(分布载荷 } q_z \text{)} \\ PL / 4 & \text{(集中载荷 } P \text{)} \end{cases} \quad (26)$$

## 4 算例分析

本文考虑双对称横截面的薄壁箱形梁,重点关注载荷高度参数  $e_z$  的重要性以及几何参数缩短对屈曲和后屈曲行为的影响。

### 4.1 分布载荷作用下的薄壁箱形梁的非线性屈曲

为了验证本文理论的正确性,求解薄壁箱形梁在弯曲、翘曲和扭转三种模态下的非线性屈曲临界分布载荷,并将之与有限元分析结果(ANSYS)进行对比。在本算例中,简支薄壁箱形梁的分布载荷作用于三种载荷位移高度  $e_z$ ,分别为 0.1 m, 0 m 和 -0.1 m。其材料参数和几何参数为  $L = 6$  m,  $h = 0.2$  m,  $b = 0.15$  m,  $E = 2.1$  GPa,  $\nu = 0.3$ 。顶板和底板厚度为  $t_1 = t_3 = 4$  mm, 腹板厚度为  $t_2 = t_4 = 6$  mm。对薄壁箱形梁进行有限元建模,在 Ansys 软件中采用 4node 181 壳单元,在网格划分后生成 1932 个节点和 1890 个单元,并对其进行简支边界条件约束,如图 3 所示。

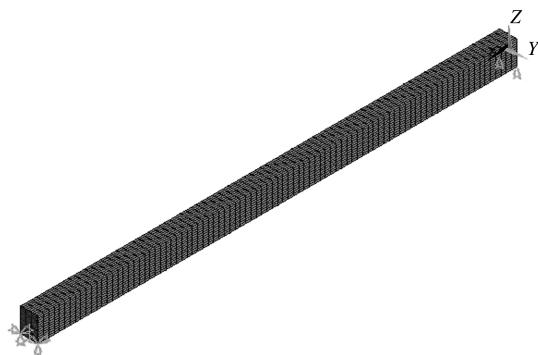


图3 薄壁箱形梁建模  
Fig. 3 Modeling thin-walled box beam

当分布载荷分别作用于顶板、腹板中点和底板时,横向位移  $v$ 、垂直位移  $w$  和扭转角  $\theta$  的屈曲平衡路径如图 4~图 6 所示。

可以看出,数值屈曲载荷对于后屈曲响应中观察到的分岔点,非线性理论预测的结果与有限元法的结果很一致。施加于顶板、腹板中部和底板时的

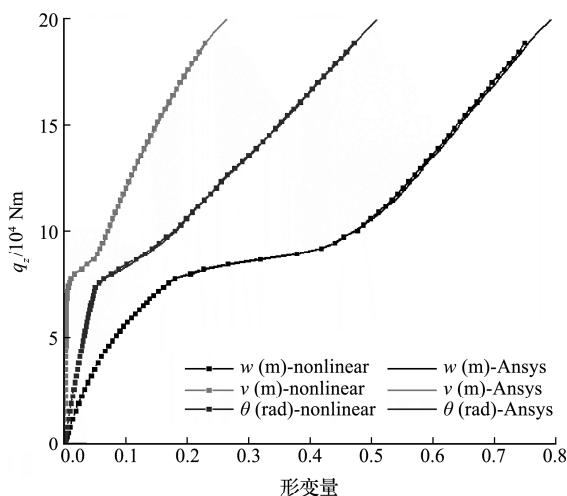


图4 作用于上顶板的分布载荷-形变路径  
Fig. 4 Distributed load-deformation path acting on top plane

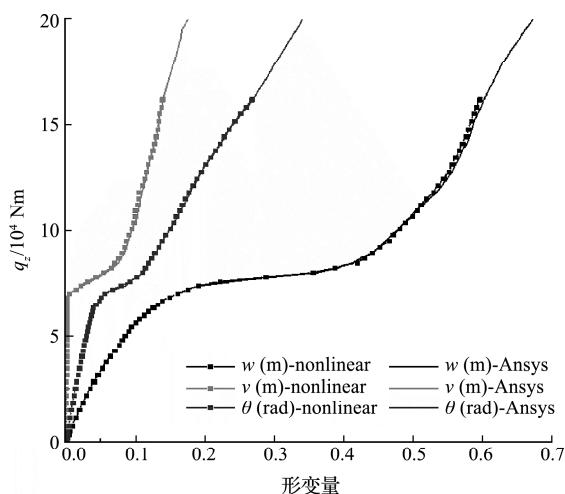


图5 作用于腹板中部的分布载荷-形变路径  
Fig. 5 Distributed load-deformation path acting on middle plane

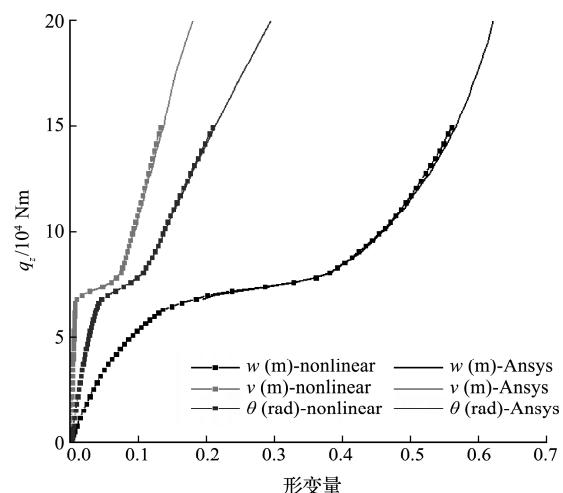


图6 作用于下底板的分布载荷-形变路径  
Fig. 6 Distributed load-deformation path acting on bottom plane

临界分布载荷分别为  $7.69 \times 10^4$  Nm,  $7.56 \times 10^4$  Nm 和  $7.37 \times 10^4$  Nm。后屈曲路径在临界点后开始趋于平缓,随着分布载荷的增加,形变量也随之有明显增大。当载荷施加在下底板时,临界载荷对应的垂直位移  $w$  为 0.160 m,当载荷施加在上顶板时,垂直位移  $w$  增加到 0.204 m。由此可知,在前屈曲垂直位移增大的情况下,几何非线性效应也增大。载荷高度对各形变的后屈曲路径的影响较大。同时可知当分布载荷施加于顶板时,后屈曲临界弯矩较大。

#### 4.2 集中载荷作用下的薄壁箱形梁的非线性屈曲

本算例中,集中载荷作用下的薄壁箱形梁的梁长为  $L=5$  m,箱形梁板厚度为 5 mm,其他几何和材料性能与上一算例相同,分别计算集中载荷作用于简支薄壁箱梁梁长中点处的上顶板、腹板中点和下底板的载荷-形变路径曲线,如图 7~图 9 所示。

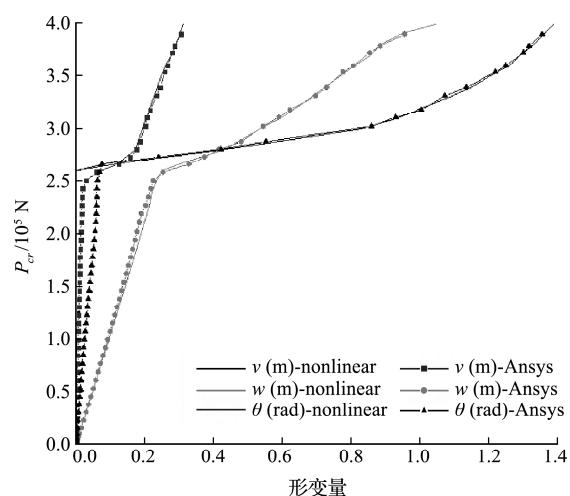


图7 作用于上顶板的集中载荷-形变路径  
Fig. 7 Concentrated load-deformation path acting on top plane

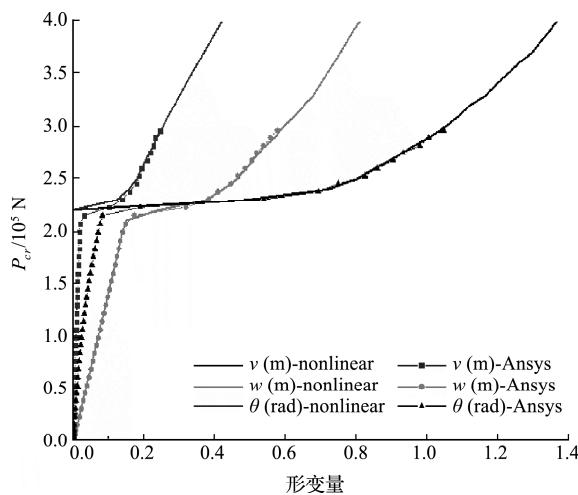


图 8 作用于腹板中部的集中载荷-形变路径

Fig. 8 Concentrated load-deformation path on the middle plane

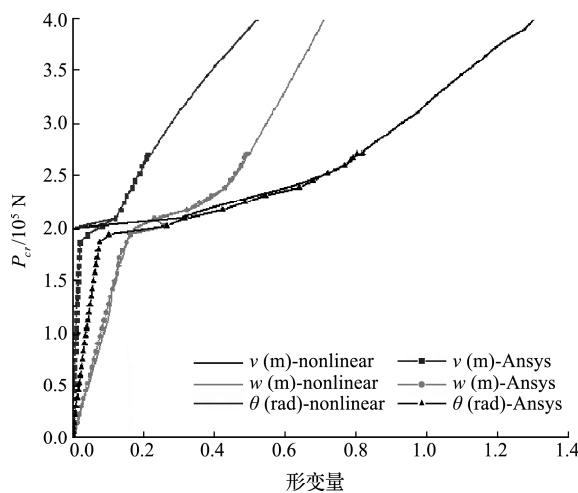


图 9 作用于下底板的集中载荷-形变路径

Fig. 9 Concentrated load-deformation path acting on the bottom plane

该算例同时考虑了线性和几何非线性的屈曲行为。其中：

Linear：表示不考虑非线性效应及前屈曲变形，由线性或经典理论确定的屈曲值。

Nonlinear：表示采用本理论非线性模型得到的值，考虑了前屈曲挠度。

表 1 薄壁简支箱形梁三种不同载荷高度下的临界载荷

Tab. 1 Critical bending forces of thin-wall simply supported box beams under three different load heights

临界载荷 $P_{cr}(10^5 \text{ Nm})$	上板 $(e_z=0.1 \text{ m})$	腹板中点 $(e_z=0 \text{ m})$	下板 $(e_z=-0.1 \text{ m})$
Nonlinear	2.62	2.29	2.00
Linear	2.59	2.06	1.88

由表 1 可知，无论是线性还是非线性屈曲分析

时，薄壁简支箱形梁的临界载荷随载荷高度降低而减小。且线性屈曲的临界载荷值总要小于非线屈曲的临界载荷值，本文可认为线性屈曲的解由于未考虑非线性耦合项，所以其临界值更为保守。

从图 7~图 9 可以看出，非线性初始屈曲路径的理论值与壳有限元模型计算的结果吻合，其分岔值与表 1 所示的屈曲载荷一致。其后屈曲平衡路径趋于稳定。在屈曲状态下，载荷-挠度( $w$ )曲线相较其他形变表现出更强的刚度性能。通过对比可以看出，载荷施加在薄壁箱形梁上顶板时，简支梁的承载力更大。由载荷-扭转( $\theta$ )后屈曲路径可以看出，随着载荷的增加，扭转形变的影响占主要因素。当载荷作用于上顶板时，扭转角的分岔值为 1.35 rad；腹板中点时的分岔值为 1.05 rad，下底板的分岔值为 0.82 rad，载荷高度对载荷-形变路径的影响较大。

## 5 结 论

本文对薄壁简支箱形梁进行了弯扭条件的非线性屈曲与后屈曲行为分析，提出的简支薄壁箱形梁公式能够正确地预测箱形梁的三维非线性屈曲响应。

(1) 非线性的理论解析法相较于有限元模型方法获得的临界载荷解一致性良好。

(2) 在忽略缩短效应的情况下，后屈曲路径在临界分叉点附近都趋于稳定。

(3) 在后屈曲状态下，载荷-垂直位移曲线相较于其他形变表现出更强的刚度性能。

## 参考文献(References)：

- [1] Scheidl R, Troger H. A comparison of the postbuckling behavior of plates and shells[J]. *Computers & Structures*, 1987, **27**(1): 157-163.
- [2] Timoshenko S P. *Theory of Elastic Stability* [M]. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [3] Barsoum R S, Gallagher R H. Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1970, **2**(3): 335-352.
- [4] Bažant Z P, El Nimeiri M. Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1973, **99**(b): 1259-1281.
- [5] Lin W Y, Hsiao K M. Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly-symmetric

- thin-walled beams[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190** (45): 6023-6052.
- [6] Grimaldi A, Pignataro M. Postbuckling behavior of thin-walled open cross-section compression members [J]. *Journal of Structural Mechanics*, 1979, **7** (2): 143-159.
- [7] Ghafari E, Rezaeepazhand J. Two-dimensional cross-sectional analysis of composite beams using Rayleigh-Ritz-based dimensional reduction method [J]. *Composite Structures*, 2018, **184**: 872-882.
- [8] Kim D M, Choi S, Jang G W, et al. Buckling analysis of thin-walled box beams under arbitrary loads with general boundary conditions using higher-order beam theory[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2019, **33**(5): 2289-2305.
- [9] Arruda M R T, Castro L M S, Ferreira A J M, et al. Physically non-linear analysis of beam models using Carrera Unified Formulation [J]. *Composite Structures*, 2018, **195**: 60-73.
- [10] Bebiano R, Basaglia C, Camotim D, et al. GBT buckling analysis of generally loaded thin-walled members with arbitrary flat-walled cross-sections [J]. *Thin-Walled Structures*, 2018, **123**: 11-24.
- [11] 张元海,林丽霞.偏心轴向荷载作用下薄壁箱梁的约束扭转翘曲应力研究[J].工程力学,2013, **30**(3):32-36. (ZHANG Yuan-hai, LIN Li-xia. Research on warping stress of restrained torsion for thin-walled box girder under eccentric axial load [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(3):32-36. (in Chinese))
- [12] Kolakowski Z, Kubiak T. Some aspects of the longitudinal-transverse mode in the elastic thin-walled girder under bending moment[J]. *Thin-Walled Structures*, 2016, **102**: 197-204.
- [13] Szymczak C, Kujawa M. Torsional buckling and post-buckling of columns made of aluminium alloy [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **60**: 711-720.
- [14] Cortínez V H, Piovan M T. Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **258**(4): 701-723.
- [15] Eurocode. *Design of Steel Structures* [M]. Brussels, 1992.
- [16] Trahair N S. *Flexural-Torsional Buckling of Structures* [M]. London: Chapman and Hall, 1993.

## Nonlinear post-buckling of thin-walled box beams considering bending and torsion

TAN Min-yao, CHENG Wen-ming\*

(School of Mechatronics Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** In this paper, the static stability of thin-walled box beams under eccentric loads is described by using a displacement field with medium bending-torsion under the premise of large displacement and small torsion. The nonlinear formula is applied to the pre-buckling and post-buckling behavior of simply supported box beams under different loads. Galerkin method is used to discretise the nonlinear differential system. The incremental Newton-Raphson method is used to solve the algebraic equation. The numerical results show that when the current buckling displacement is not negligible, the classical lateral buckling prediction is conservative and the nonlinear buckling solution is more reliable. In this paper, the effect of load height parameters on the analysis results is considered, and the calculated post-buckling response is compared with the finite element result (ANSYS) using shell elements.

**Key words:** bending; torsion; thin-walled box beam; nonlinear; post-buckling

### 引用本文/Cite this paper:

谭敏尧,程文明.考虑弯扭形变的薄壁箱形梁的非线性后屈曲[J].计算力学学报,2022, **39**(2):222-228.

TAN Min-yao, CHENG Wen-ming. Nonlinear post-buckling of thin-walled box beams considering bending and torsion [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(2): 222-228.