

# 拱桥悬臂施工过程中面内特征值的传递矩阵法

康厚军<sup>\*1,2</sup>, 朱国敬<sup>1</sup>, 苏潇阳<sup>1</sup>

(1. 湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082; 2. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004)

**摘要:**采用传递矩阵法对拱桥悬臂施工过程中的面内特征值问题进行求解,建立了该类桥型施工过程中面内竖弯刚度的评估方法。首先,将索和拱分别视为无垂度的张紧弦和欧拉-伯努利梁,基于传递矩阵法基本理论推导了系统的总传递矩阵,考虑拱和索的边界条件以及索拱节点的位移连续性条件得到系统的特征值方程,进而计算出系统的频率和模态。同时,采用有限元分析软件 ANSYS15.0 建立拱桥合拢状态的有限元模型并得到频率和振型的有限元解,通过对比本文方法与有限元方法计算结果,证明本文方法和模型的正确性。然后,分别采用上述理论方法和有限元方法对拱桥合拢前半跨模型的频率和模态进行分析对比,两者结果一致进一步说明了本文方法和模型的正确性。最后,选取了索的弹性模量、初始索力以及拱桥的半径等参数,作为考虑影响结构自振频率的因素,对模型的前六阶频率进行了系统的参数分析,得出拱桥的设计参数以及合拢状态下索的设计参数对结构动力性能的影响规律,并给出相应实际工程的改善措施。

**关键词:**索拱模型;传递矩阵法;自由振动;频率;有限元

中图分类号:U448.27;O313.7

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2022)02-0198-11

## 1 引言

拱桥是一种古老的桥梁结构,其两端除了产生竖向反力之外,还产生可以大大降低拱截面弯矩的水平反力。大多数拱桥施工采用斜拉悬臂浇筑法,考虑到斜拉索和拱桥主体结构的耦合振动,合拢过程中的振动状态尤其复杂。因此,围绕拱桥施工中的动力学行为,国内外学者在拱桥建模方面做了大量研究。

丁毅<sup>[1]</sup>考虑了竖转加平转施工的钢箱拱桥,通过将其竖转动态过程分解成不同角度的静力模型,借助正装迭代法求得索力,进一步分析了拱桥竖转施工过程的静动力和稳定性性能。孟繁义<sup>[2]</sup>建立台江区的东莞水道特大桥有限元三维模型,对其主拱吊装阶段的动力特性进行了计算分析,为该桥的顺利建成提供了科学数据。向中富等<sup>[3]</sup>实际研究了拱桥拱架施工过程中的结构行为分析方法与模型,并通过实桥分析、模型试验和实桥测试结果比较证明了其分析方法的可行性。訾银辉等<sup>[4]</sup>在斜拉悬臂浇筑施工拱桥正装计算中引入优化理论,采用一阶分析法进行迭代优化,有效改善了施工阶段

拱圈截面的受力。康厚军等<sup>[5-7]</sup>基于索拱结构的力学模型,考虑拱结构的几何方程和物理方程,并根据索拱自由振动的动力学方程,利用半解析方法-传递矩阵法对索拱结构面内及面外自由振动特征值问题进行了求解。文献[8,9]均采用有限元程序 Midas 计算并探讨了钢管混凝土拱桥的静力特性、动力特性和施工过程以及成桥后的稳定性能,为钢管混凝土拱桥的设计和施工提供了参考。易壮鹏等<sup>[10]</sup>提出了多索支撑拱的全局分析模型,将整体分为多个部分,再将各个部分组装为整体,以模拟拱桥的斜拉索架设施工,并对平面内自由振动特性进行了结构参数研究。

多体系统传递矩阵法是一种采用矩阵来描述多输入多输出的系统内部输入与输出之间关系的手段和方法,近年广泛应用在桥梁体系动力学特性研究中。芮筱亭等<sup>[11,12]</sup>发展了多体系统传递矩阵法,研究了多体系统发射动力学理论与技术,并将其应用在火箭和火炮武器射击精度和安全性设计与试验研究中。谢维东<sup>[13]</sup>提出了上中下承式三种拱桥整桥面内自由振动特性的通用简化动力学模型(拱-弹簧-梁组合体系),并利用哈密顿原理推导出其面内自由振动的控制微分方程,结合传递矩阵法求解其特征值。苏潇阳等<sup>[14]</sup>建立了斜拉桥的多索梁模型,并考虑索和梁的轴向和横向振动的微分方程,基于传递矩阵法的基本原理对模型自由振动

收稿日期:2021-01-01;修改稿收到日期:2021-02-19.

基金项目:国家自然科学基金(11972151;11872176)资助项目.

作者简介:康厚军\*(1977-),男,博士,教授  
(E-mail:khjun@hnu.edu.cn).

特征值进行求解,并与 ANSYS 得出的精确解进行对比,相对误差很小。康厚军等<sup>[15]</sup>建立了漂浮式独塔斜拉桥新的三梁离散弹簧整体动力学模型,并利用传递矩阵法结合相应的动力学理论关于其进行求解。文献[16,17]基于漂浮式独塔斜拉桥三梁离散弹簧力学模型,采用传递矩阵法关于拉索对斜拉桥竖向振动频率的影响进行了研究,并介绍了采用传递矩阵法对不同体系斜拉桥的处理方法。吉伯海等<sup>[18]</sup>充分考虑了斜拉桥的延伸、塔的弯矩和轴力引起的位移及转角等因素,利用传递矩阵法并结合斜拉桥自身的特点确定了联立方程组所需的若干边界条件和兼容条件,从而实现斜拉桥内力和位移的求解,为大型桥梁结构初步设计提供了新型便捷的计算方法。刘利等<sup>[19]</sup>应用传递矩阵法对径向均布荷载作用下的圆拱面内屈曲微分方程进行解答,利用边界条件导出其特征方程,从而求得其屈曲荷载。

综上所述,现有的对索拱结构动力学的研究多为有限元方法,但是这种方法的精度依赖于建模方法以及单元划分规则,并且在模型参数发生变化时,有限元方法会因为重新建模而变得非常复杂<sup>[20]</sup>,因此对于模型的参数分析效果稍显不足。传递矩阵法在机械、军工、航空航天和土木工程等领域虽有广泛应用,但用于拱桥施工过程中动力学分析的研究尚未见到。与此同时,拱桥在施工过程中,合拢前的最大悬臂状态和刚合拢的索-拱阶段为最危险的施工工况。鉴于此,本文基于拱桥的力学模型,考虑索拱结构的面内自由振动的动力学方程,并结合索拱耦合处的位移协调条件,将传递矩阵法应用在拱桥合拢过程的动力学分析中,对其面内特征值问题进行求解。同时,采用有限元软件建立了拱桥施工合拢时全跨和合拢前半跨的有限元模型,并将频率和振型与本文方法得到的结果进行对比,验证了本文方法的正确性,同时也建立了该类桥型施工过程中面内竖弯刚度的评估方法。

## 2 索拱模型

### 2.1 基本构型及假设

将拱桥和各索的边界条件分别视为固支和铰支,模型中索拱耦合点位置为随机点,合拢过程共有  $n$  根斜拉索,随机分布在左侧和右侧,模型假定左侧  $m$  根,右侧  $n-m$  根,拱划分为  $n+1$  个拱段。分别建立拱局部坐标系  $R_a o_a \varphi_a$  和拉索局部坐标系  $x_c o_c y_c$  来描述拱和索的振动,模型计算如图 1 所

示,拱半径为  $R$ ,圆心角为  $\varphi_0$ ,每个拱段的圆心角为  $\varphi_i$ ,每根斜拉索与拱切线方向的夹角为  $\theta_i$ ,拉索锚固端与拱锚固端水平距离  $l_0$ 。在此模型基础上提出以下基本假设。

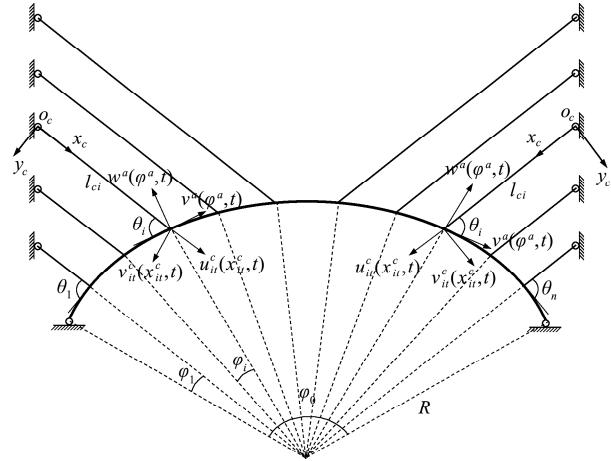


图 1 拱桥合拢状态模型

Fig. 1 Closed state model of an arch bridge

(1) 为便于求解拱结构的微分方程,将拱局部坐标系设为极坐标系,坐标原点为圆心,拱的两个线位移分别为径向位移和切向位移。

(2) 不考虑拱剪切变形的影响,即按照欧拉-伯努利梁的振动方程求解。

(3) 索的垂度和初始静态构型忽略不计。

(4) 仅考虑索和拱的小幅振动,且拱轴线不伸缩。

### 2.2 传递矩阵求解

首先,考虑拱的平面内振动微分方程<sup>[5]</sup>,

$$\frac{\partial^5 v}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{mR^4}{E_a J_X} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial \varphi} = 0 \quad (1)$$

式中  $m$ 、 $R$ 、 $E_a$  和  $J_X$  分别为拱的线密度、半径、弹性模量和惯性矩。 $N_i$  为索初始轴力。由于线性方程的振动是简谐的,设  $v_a(\varphi, t) = v(\varphi) \sin(\omega t + \phi)$ , 即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\omega^2 v \quad (2)$$

式中  $\omega$  为拱自由振动的圆频率,  $v(\varphi)$  为振型函数,  $\phi$  为初相角。将式(2)代入式(1),并令  $x^2 = mR^4/E_a J_X$ , 得

$$\frac{\partial^5 v}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + (1-x^2) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (3)$$

方程(3)对应的特征方程为

$$r^5 + 2r^3 + (1-x^2)r = 0 \quad (4)$$

解得特征方程(4)的根有

$$r_{1,2} = \pm i \eta = \pm i \sqrt{1+x}$$

$$r_{3,4} = \pm \gamma = \pm \sqrt{x-1}, r_5 = 0$$

因此,方程(1)的解可以写成级数形式为

$$v = C_1 \exp(i\eta\varphi) + C_2 \exp(-i\eta\varphi) + C_3 \exp(\gamma\varphi) + C_4 \exp(-\gamma\varphi) + C_5 \quad (5)$$

$$u = C_1 \frac{1}{i\eta} \exp(i\eta\varphi) + C_2 \frac{1}{-i\eta} \exp(-i\eta\varphi) + C_6 + C_3 \frac{1}{\gamma} \exp(\gamma\varphi) + C_4 \frac{1}{-\gamma} \exp(-\gamma\varphi) + C_5 \varphi \quad (6)$$

式中  $C_j (j=1, 2, \dots, 6)$  为实常数系数。

对  $x$  的大小分类讨论。

(1) 当  $x < 1$  时, 令  $\alpha = \sqrt{1-x}$ ,  $\beta = \sqrt{x+1}$

此时, 根据力的平衡条件、内力与变形的物理关系, 可得到切向位移  $u$ 、径向位移  $v$ 、相应于拱轴方向上的转角  $\theta$ 、弯矩  $M$ 、剪力  $Q$  和轴向力  $N$  的表达式分别为

$$u(\varphi) = T_{11}C_1 + T_{12}C_2 + T_{13}C_3 + T_{14}C_4 + T_{15}C_5 + T_{16}C_6 \quad (7)$$

$$v(\varphi) = T_{21}C_1 + T_{22}C_2 + T_{23}C_3 + T_{24}C_4 + T_{25}C_5 \quad (8)$$

$$\theta(\varphi) = T_{31}C_1 + T_{32}C_2 + T_{33}C_3 + T_{34}C_4 + T_{35}C_5 + T_{36}C_6 \quad (9)$$

$$M(\varphi) = T_{41}C_1 + T_{42}C_2 + T_{43}C_3 + T_{44}C_4 + T_{45}C_5 \quad (10)$$

$$Q(\varphi) = T_{52}C_2 + T_{53}C_3 + T_{54}C_4 + T_{55}C_5 \quad (11)$$

$$N(\varphi) = T_{62}C_2 + T_{63}C_3 + T_{64}C_4 + T_{65}C_5 \quad (12)$$

元素  $T_{11} \sim T_{65}$  见附录 1。

(2) 当  $x > 1$  时, 令  $\alpha = \sqrt{1+x}$ ,  $\beta = \sqrt{x-1}$

同样得到式(7~12), 只是元素  $T_{ij}$  不同, 见附录 2。

其次考虑索的纵横向振动微分方程为

$$E_c A_c \frac{\partial^2 U_c(x_c, t)}{\partial x^2} - \mu_c \frac{\partial^2 U_c(x_c, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

$$N_i \frac{\partial^2 V_c(x_c, t)}{\partial x^2} - \mu_c \frac{\partial^2 V_c(x_c, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

式中  $\mu_c$ 、 $E_c$  和  $A_c$  分别为索的线密度、弹性模量和截面面积,  $N_i$  为索的初始轴力。利用分离变量法求解以上两个偏微分方程, 令

$$U_c(x_c, t) = u_c(x_c) G_{cu}(t) \quad (15)$$

$$V_c(x_c, t) = v_c(x_c) G_{cv}(t) \quad (16)$$

式中  $u_c(x_c)$  和  $v_c(x_c)$  分别为索的纵向和横向振动振型函数, 通过求解偏微分方程(13, 14)可以得到  $u_c(x_c)$  和  $v_c(x_c)$  通解形式为

$$u_c(x_c) = C_7 \sin(\beta_c x_c) + C_8 \cos(\beta_c x_c) \quad (17)$$

$$v_c(x_c) = C_9 \sin(\delta_c x_c) + C_{10} \cos(\delta_c x_c) \quad (18)$$

式中  $C_i (i=7, \dots, 10)$  为实常数系数, 且

$$\beta_c = \omega \sqrt{\mu_c/E_c}, \delta_c = \omega \sqrt{\mu_c A_c/N_0}$$

根据力-位移关系, 由式(17, 18)可以推导出轴力  $N$  和剪力  $Q$  的表达式为

$$N_c(x_c) = C_7 E_c A_c \beta_c \cos(\beta_c x_c) - C_8 E_c A_c \beta_c \sin(\beta_c x_c) \quad (19)$$

$$Q_c(x_c) = C_9 N_0 \delta_c \cos(\delta_c x_c) - C_{10} N_0 \delta_c \sin(\delta_c x_c) \quad (20)$$

## 2.3 传递矩阵法理论

将式(7~12)写成如下矩阵形式,

$$\mathbf{Z}^a = \mathbf{T}_a \mathbf{C}_a \quad (21)$$

式中  $\mathbf{Z}^a = [u^a \ v^a \ \theta^a \ M^a \ Q^a \ N^a]^T$ , 且

$$\mathbf{C}_a = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6]^T$$

$x < 1$  或  $x > 1$  时,  $T_a$  的元素  $\mathbf{T}_{11} \sim \mathbf{T}_{65}$  分别见附录 1 和附录 2。

将式(17~20)写成矩阵形式为

$$\mathbf{Z}^c = \mathbf{T}_c \mathbf{C}_c \quad (22)$$

式中  $\mathbf{Z}^c = [u^c \ v^c \ N^c \ Q^c]^T$ ,  $\mathbf{C}_c = [C_7 \ C_8 \ C_9 \ C_{10}]^T$ ,  $\mathbf{T}_c$  元素  $\mathbf{T}_{11} \sim \mathbf{T}_{44}$  见附录 3。

式(21)中, 当  $\varphi_a = 0$  时, 有  $\mathbf{Z}_{(i-1)r}^a = \mathbf{T}_{a0} \mathbf{C}_a$ , 进而可以得到

$$\mathbf{C}_a = \mathbf{T}_{a0}^{-1} \mathbf{Z}_{(i-1)r}^a \quad (23)$$

式中  $-1$  表示矩阵的逆,  $\mathbf{Z}_{ir}^a$  为每段拱的初始端状态向量, 且

$$\mathbf{Z}_{(i-1)r}^a = [u_{(i-1)r}^a \ v_{(i-1)r}^a \ \theta_{(i-1)r}^a \ M_{(i-1)r}^a \ Q_{(i-1)r}^a \ N_{(i-1)r}^a]^T$$

将式(23)代入式(21)可得

$$\mathbf{Z}^a = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_{a0}^{-1} \mathbf{Z}_{(i-1)r}^a \quad (24)$$

令式(24)的  $\varphi_a = \varphi_{i-1}$ , 则有

$$\mathbf{Z}_{il}^a = \mathbf{U}_{i-1}^a \mathbf{Z}_{(i-1)r}^a \quad (25)$$

式中  $\mathbf{U}_{i-1}^a = \mathbf{T}_{a(i-1)} \mathbf{T}_{a0}^{-1}$ ,  $\mathbf{Z}_{il}^a$  为每段拱的末端状态向量, 且  $\mathbf{Z}_{il}^a = [u_{il}^a \ v_{il}^a \ \theta_{il}^a \ M_{il}^a \ Q_{il}^a \ N_{il}^a]^T$ , 传递方式如图 2(a)所示。

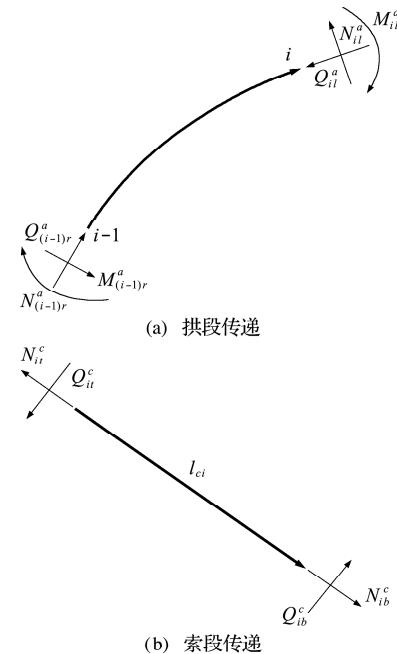


图 2 拱段与索段传递  
Fig. 2 Transfer schematic diagram of arch and cable

同样,式(22)中,当  $x_c = 0$  时,有  $\mathbf{Z}_{it}^c = \mathbf{T}_{c0}\mathbf{C}_c$ ,进而可得

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{T}_{c0}^{-1}\mathbf{Z}_{it}^c \quad (26)$$

式中  $\mathbf{Z}_{it}^c$  为每段索的锚固端状态向量,且

$$\mathbf{Z}_{it}^c = [u_{it}^c \ v_{it}^c \ N_{it}^c \ Q_{it}^c]^T$$

将式(26)代入式(22)可得

$$\mathbf{Z}^c = \mathbf{T}_c\mathbf{T}_{c0}^{-1}\mathbf{Z}_{it}^c \quad (27)$$

令式(27)的  $x_c = l_m$ , 则有

$$\mathbf{Z}_{ib}^c = \mathbf{U}_i^c\mathbf{Z}_{it}^c \quad (28)$$

式中  $\mathbf{U}_i^c = \mathbf{T}_{ci}\mathbf{T}_{c0}^{-1}$ ,  $\mathbf{Z}_{ib}^c$  为每根索的索拱连接端状态向量,  $\mathbf{Z}_{ib}^c = [u_{ib}^c \ v_{ib}^c \ N_{ib}^c \ Q_{ib}^c]^T$  传递方式如图 2(b)所示。

在每个索拱节点,由索和拱的状态向量  $\mathbf{Z}_{ib}^c$  和  $\mathbf{Z}_{it}^a$  集合成整体状态向量  $\mathbf{Z}_I$ , 表达式为

$$\mathbf{Z}_I = \mathbf{E}_i^c\mathbf{Z}_{ib}^c + \mathbf{E}_i^a\mathbf{Z}_{it}^a \quad (29)$$

式中  $\mathbf{Z}_I = [u_{il}^a \ v_{il}^a \ \theta_{il}^a \ M_{il}^a \ Q_{il}^a \ N_{il}^a \ N_{ib}^c \ Q_{ib}^c]^T$

$$\mathbf{E}_i^c = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_i^a = \begin{bmatrix} I_6 \\ 0_{2 \times 6} \end{bmatrix}$$

对拱左半部分  $m$  个索拱节点进行受力分析,如图 3(a)所示,由受力分析和位移关系可得

$$\begin{aligned} u_{ir}^a &= u_{il}^a, \quad v_{ir}^a = v_{il}^a, \quad \theta_{ir}^a = \theta_{il}^a, \quad M_{ir}^a = M_{il}^a \\ Q_{ir}^a &= Q_{il}^a - N_{ib}^c \sin\theta_i - Q_{ib}^c \cos\theta_i \\ N_{ir}^a &= N_{il}^a - N_{ib}^c \cos\theta_i + Q_{ib}^c \sin\theta_i \end{aligned} \quad (30)$$

将式(30)写成矩阵的形式,

$$\mathbf{Z}_{ir}^a = \mathbf{M}_i \mathbf{Z}_I \quad (31)$$

式中  $\mathbf{Z}_{ir}^a = [u_{ir}^a \ v_{ir}^a \ \theta_{ir}^a \ M_{ir}^a \ Q_{ir}^a \ N_{ir}^a]^T$ ,  $\mathbf{M}_i$  为索拱节点  $i$  处 ( $i \leq m$ ) 的点传递矩阵,且

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sin\theta_i & -\cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos\theta_i & \sin\theta_i \end{bmatrix}$$

对拱右半部分  $n-m$  个索拱节点进行受力分析,如图 3(b)所示,由受力分析和位移关系可得

$$\begin{aligned} u_{ir}^a &= u_{il}^a, \quad v_{ir}^a = v_{il}^a, \quad \theta_{ir}^a = \theta_{il}^a, \quad M_{ir}^a = M_{il}^a \\ Q_{ir}^a &= Q_{il}^a - N_{ib}^c \sin\theta_i - Q_{ib}^c \cos\theta_i \\ N_{ir}^a &= N_{il}^a + N_{ib}^c \cos\theta_i - Q_{ib}^c \sin\theta_i \end{aligned} \quad (32)$$

将式(32)写成矩阵的形式,

$$\mathbf{Z}_{ir}^a = \mathbf{M}_i \mathbf{Z}_I \quad (33)$$

式中  $\mathbf{Z}_{ir}^a = [u_{ir}^a \ v_{ir}^a \ \theta_{ir}^a \ M_{ir}^a \ Q_{ir}^a \ N_{ir}^a]^T$ ,  $\mathbf{M}_i$  为索拱节点  $i$  处 ( $i \geq m+1$ ) 的点传递矩阵,且

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sin\theta_i & -\cos\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos\theta_i & -\sin\theta_i \end{bmatrix}$$

在拱节点  $i$  右侧,有传递方程

$$\mathbf{Z}_{(i+1)l}^a = \mathbf{U}_i^a \mathbf{Z}_{ir}^a \quad (34)$$

将式(25, 28, 29, 31, 33)代入式(34),可以得到整个体系的传递方程

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{n+1}^a &= \mathbf{U}_n^a \mathbf{Z}_{nr}^a = \mathbf{U}_n^a \mathbf{M}_n [\mathbf{E}_n^a \mathbf{U}_{n-1}^a \mathbf{Z}_{(n-1)r}^a + \mathbf{E}_n^c \mathbf{U}_n^c \mathbf{Z}_{nr}^c] = \\ &\quad \mathbf{U}_n^a \prod_{i=n}^1 (\mathbf{M}_i \mathbf{E}_i^a \mathbf{U}_i^a) \mathbf{Z}_0^a + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \left[ \left( \mathbf{U}_n^a \mathbf{M}_n \prod_{p=n-1}^{n-i} \mathbf{E}_{p+1}^a \mathbf{U}_p^a \mathbf{M}_p \right) \mathbf{E}_i^c \mathbf{U}_i^c \mathbf{Z}_{it}^c \right] \end{aligned} \quad (35)$$

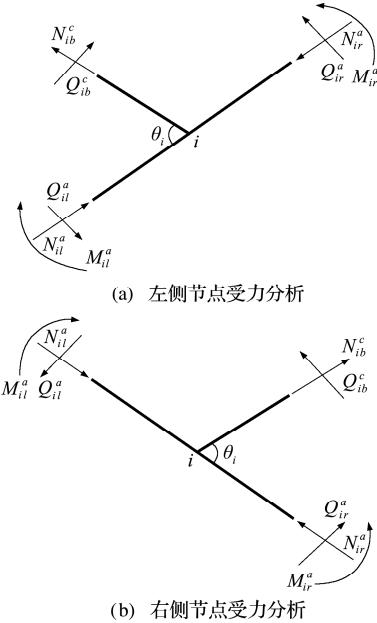


图 3 节点受力分析

Fig. 3 Node force analysis

此外,考虑到索拱节点的位移协调条件,得到左侧  $m$  个节点的位移协调方程为

$$\begin{aligned} w_{il}^a &= u_{ib}^c \cos\theta_i - v_{ib}^c \sin\theta_i \\ v_{il}^a &= -u_{ib}^c \sin\theta_i - v_{ib}^c \cos\theta_i \end{aligned} \quad (36)$$

将式(36)写成矩阵形式,即

$$\mathbf{D}_i^{al} \mathbf{Z}_{il}^a = \mathbf{D}_i^{cl} \mathbf{Z}_{ib}^c \quad (37)$$

$$\text{式中 } \mathbf{D}_i^{al} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_i^{cl} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ -\sin\theta_i & -\cos\theta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(25, 28, 29, 31)代入式(37),得到在索拱结构左半部分  $m$  ( $m < n-1$ ) 个节点的位移协调方程

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{1l}^{al} \mathbf{U}_0^a \mathbf{Z}_0^a &= \mathbf{D}_{1b}^{cl} \mathbf{U}_1^c \mathbf{Z}_{1b}^c \quad (i=1) \\ \mathbf{D}_k^{al} \left[ \sum_{k=2}^i \left( \prod_i^k \mathbf{U}_{i-1}^a \mathbf{M}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1}^c \right) \mathbf{U}_{k-1}^c \mathbf{Z}_{(k-1)t}^c \right] + \\ \mathbf{D}_i^{al} \left( \prod_i^2 \mathbf{U}_{i-1}^a \mathbf{M}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1}^a \right) \mathbf{U}_0^a \mathbf{Z}_0^a &= \mathbf{D}_i^{cl} \mathbf{U}_i^c \mathbf{Z}_{it}^c \quad (i=2,3,4,\dots,m) \end{aligned} \quad (38)$$

右侧  $n-m$  个节点的位移协调方程为

$$\begin{aligned} w_{il}^a &= -u_{ib}^c \cos \theta_i + v_{ib}^c \sin \theta_i \\ v_{il}^a &= -u_{ib}^c \sin \theta_i - v_{ib}^c \cos \theta_i \end{aligned} \quad (39)$$

将式(39)写成矩阵形式,即

$$\mathbf{D}_i^{ar} \mathbf{Z}_{il}^a = \mathbf{D}_i^{cr} \mathbf{Z}_{ib}^c \quad (40)$$

式中  $\mathbf{D}_i^{ar} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{D}_i^{cr} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & -\cos \theta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(26, 28, 29, 31, 33)代入式(39),右半部分  $n-m$  ( $m < n-1$ )个节点的位移协调方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^{ar} \left( \prod_i^2 \mathbf{U}_{i-1}^a \mathbf{M}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1}^a \right) \mathbf{U}_0^a \mathbf{Z}_0^a &= \mathbf{D}_i^{cr} \mathbf{U}_i^c \mathbf{Z}_{it}^c - \\ \mathbf{D}_i^{ar} \left[ \sum_{k=2}^i \left( \prod_i^k \mathbf{U}_{i-1}^a \mathbf{M}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1}^c \right) \mathbf{U}_{k-1}^c \mathbf{Z}_{(k-1)t}^c \right] & \end{aligned} \quad (i=m+1, m+2, \dots, n) \quad (41)$$

最后,联立式(35, 38, 41),可以得到整个系统的特征值方程

$$\mathbf{U}_{all} \mathbf{Z}_{all} = 0 \quad (42)$$

式中  $\mathbf{U}_{all}$  是整个系统的传递矩阵,  $\mathbf{Z}_{all}$  是索拱所有边界的总状态向量,含有  $4n+12$  个元素,即

$$\mathbf{Z}_{all} = [u_0^a \ v_0^a \ \dots \ u_{it}^a \ v_{it}^a \ \dots \ N_{nt}^c \ Q_{nt}^c \ \dots \ Q_{n+1}^a \ N_{n+1}^a]^T$$

结合拱的两端固支条件以及  $n$  个索的边界铰支条件,便可得到简化的系统传递矩阵  $\bar{\mathbf{U}}_{all}$  以及简化的总状态向量  $\bar{\mathbf{Z}}_{all}$ ,有

$$\bar{\mathbf{U}}_{all} \bar{\mathbf{Z}}_{all} = 0 \quad (43)$$

式中  $\bar{\mathbf{U}}_{all}$  是  $(2n+6) \times (2n+6)$  的矩阵,且

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{all} &= [M_0^a \ Q_0^a \ N_0^a \ \dots \ N_{it}^c \ Q_{it}^c \ \dots \ N_{nt}^c \\ &\quad Q_{nt}^c \ \dots \ M_{n+1}^a \ Q_{n+1}^a \ N_{n+1}^a]^T \end{aligned}$$

若系统有非零解,必然有

$$\Delta = |\bar{\mathbf{U}}_{all}| = 0 \quad (44)$$

式(44)即为系统的特征方程,利用数值分析软件 MATLAB 可以很容易得到其数值解。

### 3 算例分析

#### 3.1 模态分析

以某拱桥合拢(图 4)为例,对其面内特征值问题进行求解。拱桥和斜拉索参数如下,拱的半径为 100 m,开角为 100°,截面尺寸为 0.3 m×0.8 m,单位长度质量为 1872 kg/m,弹性模量  $E_b = 3.45e10$  Pa;斜拉索共 8 根,对称分布在拱的两侧,弹性模量  $E_c = 2.1e11$  Pa,面积均为  $A = 0.005$  m<sup>2</sup>,初始索力均为  $N = 656250$  N,索的作用位置为 10°,20°,30° 和 40°,而索与作用点切线方向的夹角分别为 60°,50°,40° 和 30°,索的锚固点与拱端点水平距离 5 m。

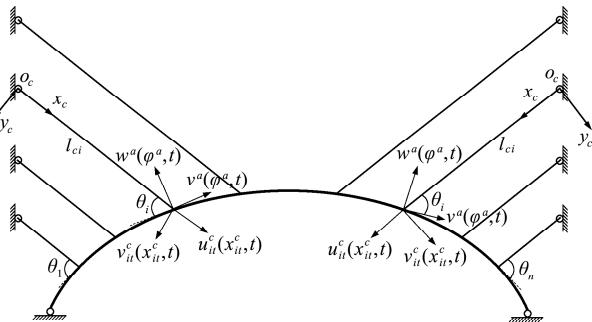


图 4 某拱桥合拢状态模型  
Fig. 4 Closed state model diagram of certain arch bridge

为了验证本文理论的正确性,采用有限元软件 ANSYS15.0 建立相应的索拱模型,拱采用 Beam3 单元模拟,索采用 Link1 单元模拟,共划分为 510 个单元。表 1 列出了本文理论和有限元模拟得到的结构前十阶频率。可以看出,本文理论计算得到的频率和有限元模拟得到的频率相对误差均未超过 4%,最大误差仅第十阶的 3.99%。图 5 给出上述两种方法计算得出的系统前六阶模态。可以看出,本文理论的前四阶模态和有限元模拟的结果一致,而第五阶和第六阶模态与有限元的结果刚好相反,原因可能是第五阶和第六阶频率比较接近,从而出现了振型互换的现象,但对模态影响不大。从图 5 和表 1 可以看出,两种方法得出的频率和振型相互吻合,说明本文的理论方法和建立模型的正确性,可以用在同类型拱桥合拢过程的基本动力学特性分析中。

表 1 大跨拱桥合拢状态模型的前 10 阶频率

Tab. 1 The first 10 frequencies of the long-span arch bridge closed state model

方法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
有限元/Hz	1.3648	1.8226	1.8339	1.9865	2.3393	2.3694	2.4869	2.4958	2.5803	2.5808
本文理论/Hz	1.35	1.8158	1.8342	1.9264	2.2871	2.4367	2.4856	2.501	2.6245	2.6881
相对误差/%	1.10	0.37	-0.02	3.12	2.28	-2.76	0.05	-0.21	-1.68	-3.99

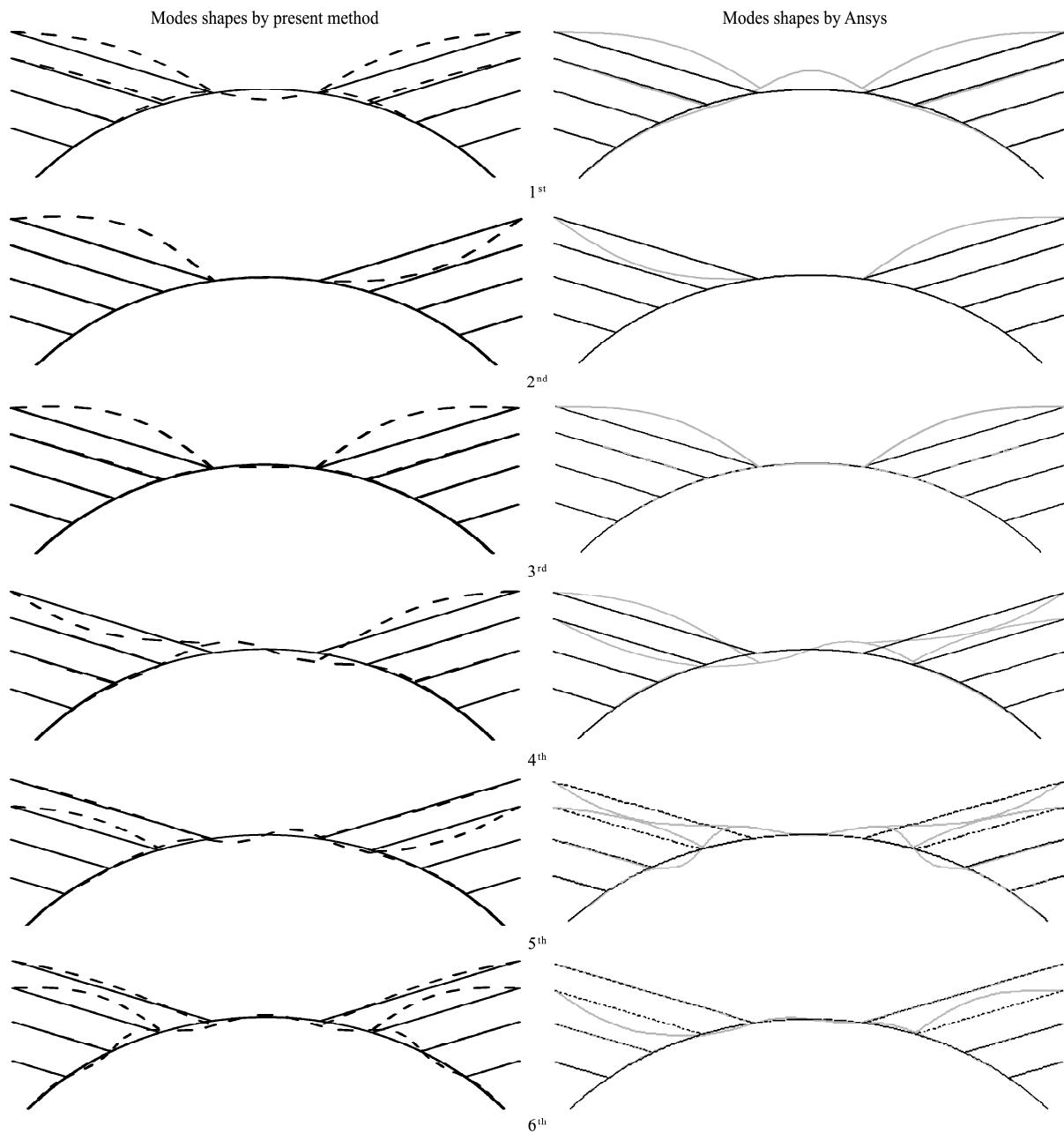


图 5 大跨拱桥合拢状态模型前六阶振型

Fig. 5 The first six modes of closed state model of long-span bridge

为了进一步说明传递矩阵法解决此类桥梁合拢过程中动力学问题的适用性,本文采用上述理论和方法对拱桥合拢前的半跨模型进行了面内特征值求解。表 2 给出了拱桥合拢前半跨模型的本文理论和有限元模型的前十阶频率,可以看出,半跨模型自振频率的计算结果与有限元模型的结果相

对误差较小,涉及拱的全局模态误差稍大,但总体吻合良好。图 6 给出了上述两种方法计算得出的前五阶模态,可以看出本文理论的前五阶模态和有限元模拟的前五阶模态也相互吻合,进一步说明了本文理论和方法的正确性。

表 2 拱桥合拢前模型的前 10 阶频率

Tab. 2 The first 10 frequencies of the model before the closure of the arch bridge

方法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
有限元/Hz	0.5316	1.8300	2.1384	2.4051	2.5118	2.9358	3.1389	3.6768	3.7344	4.2682
本文理论/Hz	0.5115	1.8307	2.099	2.4827	2.6138	3.0309	3.2505	3.6834	3.7358	4.4702
相对误差/%	3.93	-0.04	1.88	-3.12	-3.90	-3.14	-3.43	-0.18	-0.04	-4.52

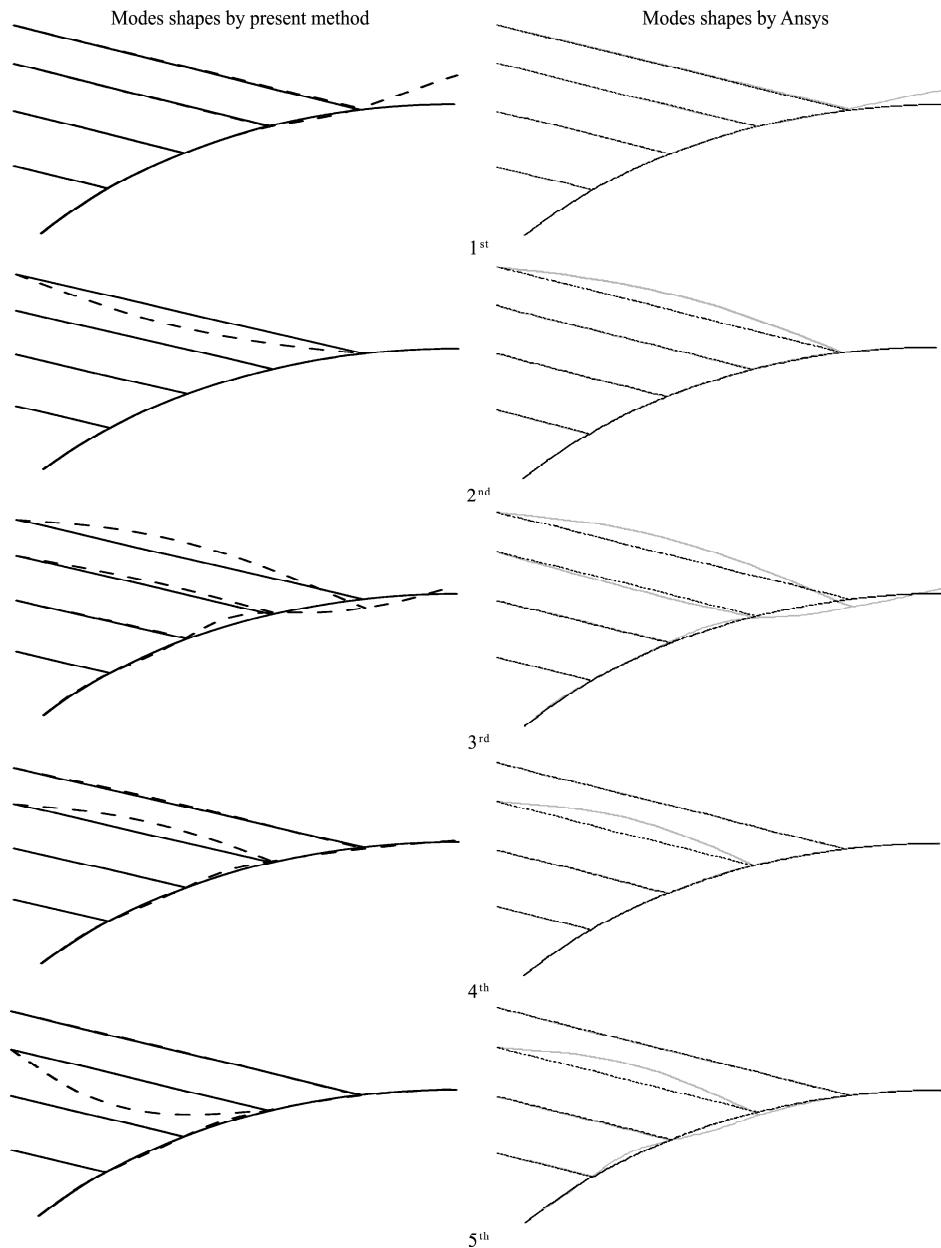


图 6 拱桥合拢前模型的前五阶模态  
Fig. 6 The first five modes of arch bridge model before closure

### 3.2 参数分析

图 7 给出了模型前六阶频率随着拉索弹性模量变化的影响曲线。考虑到实际施工时不同扣索材料的选取,拉索的弹性模量变化范围从 100 GPa 增加到 250 GPa,可以看出随着索弹性模量的增加,系统前六阶频率呈现增长的趋势,原因在于提高拉索的弹性模量会增大索对拱的支撑,提高了对拱的约束,从而增加了系统的自振频率。此外,图中相邻两阶频率之间出现了相互靠近又相互分离的现象,即结构中普遍存在 Veering 现象。此时两阶模态的频率十分接近,可能在一些情况产生 1:1 内共振并发生振型的互换。

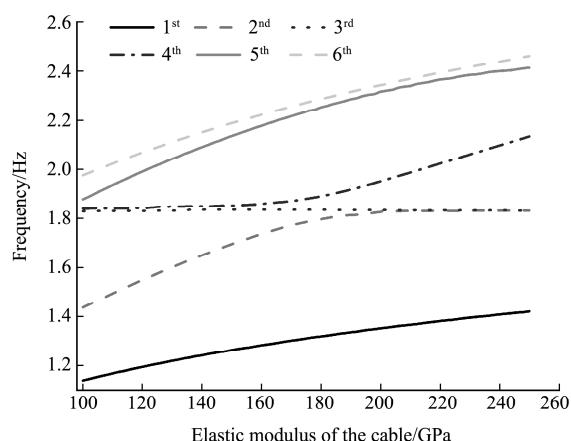


图 7 索的弹性模量对模型前六阶频率的影响  
Fig. 7 Influence of the elastic modulus of the cable on the first six frequencies of the model

图8给出了模型前六阶频率随着拱桥半径变化的影响曲线,拱桥半径从60 m增加到110 m。可以看出,随着拱桥半径的增加,模型前六阶自振频率不断减小。增加拱桥的半径,结构的等效长度会随之增加,进而降低了结构的等效刚度,而根据模型等效频率的计算公式 $\omega = \sqrt{k/m}$ ,刚度减小会导致结构的自振频率减小。还注意到随着拱桥半径的增加,模型第二阶和第三阶频率曲线几乎保持重合,这是因为系统的第二阶和第三阶振型都是以索的振动为主的局部模态,且分别表现为反对称和正对称。第五阶和第六阶频率曲线也出现了同样

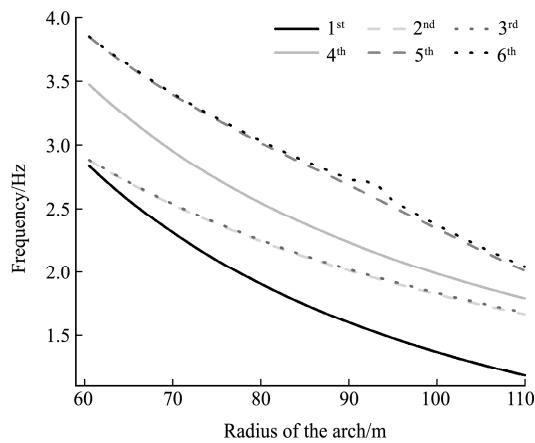


图8 拱桥半径对模型前六阶频率的影响  
Fig. 8 Influence of arch bridge radius on the first six frequencies of the model

## 4 结 论

本文基于拱桥的力学模型,考虑索拱结构的面内自由振动的动力学方程,并结合索拱耦合处的位移协调条件,将传递矩阵法应用在拱桥合拢过程的动力学分析中,并对其合拢状态前后的自振频率进行特征值求解,建立了该类桥型施工过程中面内竖弯刚度的评估方法。以某拱桥合拢模型为例,对其面内特征值问题进行了求解,并采用有限元模拟对本文理论得到的频率和模态进行验证,结果吻合较好。同时,针对前六阶频率进行了详细的参数分析,得到以下结论:

(1) 本文理论和方法计算得出的拱桥合拢时全跨模型和合拢前半跨模型的频率和振型都与ANSYS有限元模型的计算结果一致,说明了本文理论和方法的正确性,可以应用在同类型结构的动力学分析。

(2) 增加拉索的弹性模量,增大了拉索对拱的支撑,提高了对拱的约束,因此会增大结构的前六

的趋势,这也解释为何第五阶和第六阶振型出现了互换的现象。

图9给出了模型前六阶频率随着拉索的初始索力变化的影响曲线。拉索的初始索力变化范围从0.65 MN增加到1 MN,可以看出模型的前六阶频率随着初始索力的增大而增大,这是因为增加索力会造成系统的几何刚度增大,从而系统的自振频率也会增大。此外,与图7类似,图9也出现了Veering现象,说明索拱结构很容易出现相邻两阶频率产生1:1内共振并发生振型互换的现象,工程中应注意初始索力的选取,以避免Veering现象的发生。

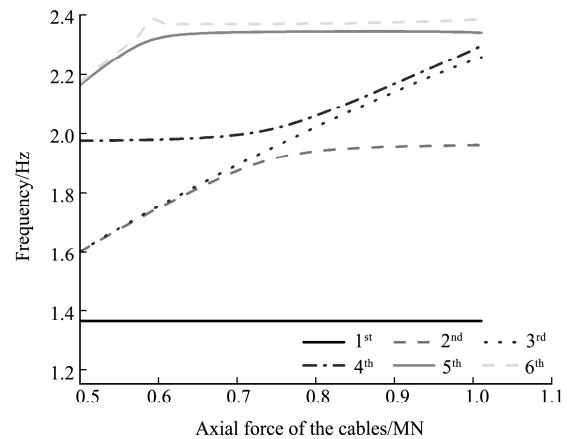


图9 初始索力对模型前六阶频率的影响  
Fig. 9 Influence of the initial cable force on the first six frequencies of the model

阶频率。此外,各相邻阶频率之间出现了Veering现象,工程中应选取合适的拉索材料以避免内共振现象的发生。

(3) 增大拉索的初始索力,会增大系统的几何刚度,从而增大系统的自振频率。随着初始索力的增加,相邻各阶频率之间也会发生Veering现象,工程中应选取合适的拉索初始索力进行施工。

(4) 增加拱桥的半径,会减小结构的前六阶频率。当拱桥的半径增加时,使得结构的等效长度增加,减小了结构的等效刚度,从而对结构的自振频率起到了减小的作用。

## 附录 1:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \varphi, \quad T_{45} = (\beta^2 - 1) \sin(\beta\varphi) \frac{E_a J_X}{R^2}, \quad T_{36} = \frac{1}{R} \\ T_{12} &= \frac{\sin(\alpha\varphi)}{\alpha}, \quad T_{52} = (\alpha - \alpha^3) \sin(\alpha\varphi) \frac{E_a J_X}{R^3} \\ T_{13} &= -\frac{\cos(\alpha\varphi)}{\alpha}, \quad T_{53} = (\alpha - \alpha^3) \cos(\alpha\varphi) \frac{E_a J_X}{R^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{14} &= \frac{\sin(\beta\varphi)}{\beta}, T_{54} = (\beta - \beta^3) \sin(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^3} \\
T_{15} &= -\frac{\cos(\beta\varphi)}{\beta}, T_{55} = (\beta - \beta^3) \cos(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^3} \\
T_{16} &= 1, T_{21} = 1, T_{62} = (\alpha^4 - \alpha^2 - x^2) \cos(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{22} &= \cos(\alpha\varphi), T_{23} = \sin(\alpha\varphi), T_{24} = \cos(\beta\varphi) \\
T_{25} &= \sin(\beta\varphi), T_{65} = (\beta^4 - \beta^2 - x^2) \sin(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{31} &= \frac{\varphi}{R}, T_{64} = (\beta^4 - \beta^2 - x^2) \cos(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{32} &= \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \frac{\sin(\alpha\varphi)}{R} \\
T_{43} &= (\alpha^2 - 1) \sin(\alpha_1\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{33} &= (\alpha - \frac{1}{\alpha}) \frac{C_3 \cos(\alpha\varphi)}{R}, T_{34} = \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right) \frac{\sin(\beta\varphi)}{R} \\
T_{42} &= (\alpha^2 - 1) \cos(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{35} &= \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\cos(\beta\varphi)}{R} \\
T_{44} &= (\beta^2 - 1) C_4 \cos(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{61} = -\frac{E_a J_x}{R^2} x^2 \\
T_{63} &= (\alpha^4 - \alpha^2 - x^2) \sin(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{41} = -\frac{E_a J_x}{R^2}
\end{aligned}$$

## 附录 2:

$$\begin{aligned}
T_{44} &= (\alpha^2 - 1) \cos(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{61} = -\frac{E_a J_x}{R^2} x^2 \\
T_{21} &= 1, T_{43} = -(1 + \beta^2) \sin(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{36} &= \frac{1}{R}, T_{41} = -\frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{42} &= -(1 + \beta^2) \cos(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{34} &= \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \frac{\sin(\alpha\varphi)}{R} \\
T_{54} &= (\alpha - \alpha^3) \sin(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^3}, T_{15} = -\frac{\cos(\alpha\varphi)}{\alpha} \\
T_{16} &= 1, T_{45} = (\alpha^2 - 1) \sin(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2} \\
T_{33} &= \left(\frac{1}{\beta} + \beta\right) \frac{\cos(\beta\varphi)}{R} \\
T_{52} &= -(\beta^3 + \beta) \sin(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^3}, T_{11} = \varphi \\
T_{12} &= \frac{\sin(\beta\varphi)}{\beta}, T_{53} = -(\beta^3 + \beta) \cos(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{31} &= \frac{\varphi}{R}, T_{22} = \sin(\beta\varphi) \\
T_{55} &= (\alpha - \alpha^3) \cos(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^3} \\
T_{32} &= \left(\frac{1}{\beta} + \beta\right) \frac{\sin(\beta\varphi)}{R} \\
T_{62} &= (\beta^4 + \beta^2 - x^2) \sin(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{24} = \cos(\alpha\varphi) \\
T_{63} &= (\beta^4 + \beta^2 - x^2) \cos(\beta\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{14} = \frac{\sin(\alpha\varphi)}{\alpha} \\
T_{64} &= (\alpha^4 - \alpha^2 - x^2) \cos(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{25} = \sin(\alpha\varphi) \\
T_{65} &= (\alpha^4 - \alpha^2 - x^2) \sin(\alpha\varphi) \frac{E_a J_x}{R^2}, T_{23} = \sh(\beta\varphi)
\end{aligned}$$

## 附录 3:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \sin(\beta_c x_c), T_{12} = \cos(\beta_c x_c), T_{23} = \sin(\delta_c x_c) \\
T_{44} &= -N_0 \delta_c \sin(\delta_c x_c), T_{32} = -E_c A_c \beta_c \sin(\beta_c x_c) \\
T_{43} &= N_0 \delta_c \cos(\delta_c x_c), T_{31} = E_c A_c \beta_c \cos(\beta_c x_c) \\
T_{24} &= \cos(\delta_c x_c)
\end{aligned}$$

## 参考文献(References):

- [1] 丁毅. 转体施工钢箱拱桥竖转过程结构受力分析研究[J]. 山东交通科技, 2007(1): 78-82. (DING Yi. Structural analysis during vertical rotation on steel box arch bridges using rotation construction method [J]. Shandong Transportation Technology, 2007(1): 78-82. (in Chinese))
- [2] 孟繁义. 台风区大跨拱桥拱肋安装过程的动力特性分析[J]. 铁道建筑技术, 2008, 2: 27-30, 43. (MENG Fan-yi. Drive characters analysis on large-span arch Bridge's arch rib installation process in typhoon area [J]. Railway Construction Technology, 2008, 2: 27-30, 43. (in Chinese))
- [3] 向中富, 徐君兰, 王银辉, 等. 拱桥拱架施工过程中的结构行为分析[J]. 重庆交通大学学报, 2001, 20(S1): 17-22. (XIANG Zhong-fu, XU Jun-lan, WANG Yin-hui, et al. Structural analysis during the course of construction of arch bridge with the aid of centring [J]. Journal of Chongqing Jiaotong Institute, 2001, 20 (S1): 17-22. (in Chinese))
- [4] 訾银辉, 田仲初, 彭文平. 基于 ANSYS 的斜拉悬臂浇筑拱桥施工中的索力优化[J]. 公路与汽运, 2013(1): 171-176. (ZI Yin-hui, TIAN Zhong-chu, PENG Wen-ping. Optimization of cable force in construction of

- cable-stayed cantilever casting arch bridge based on ANSYS[J]. *Highway & Automotive Applications*, 2013(1):171-176. (in Chinese))
- [5] 康厚军. 索拱结构的稳定与振动研究[D]. 湖南大学, 2007. (KANG Hou-jun. The Research on Stability and Vibration of Cable-Arch Structure[D]. Hunan University, 2007. (in Chinese))
- [6] Kang H J, Zhao Y Y, Zhu H P. Out-of-plane free vibration analysis of a cable-arch structure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(4):907-921.
- [7] Zhao Y Y, Kang H J. In-plane free vibration analysis of cable-arch structure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **312**(3):363-379.
- [8] 张通,孙建平,季日臣,等.下承式钢管混凝土系杆拱桥力学特性分析[J].甘肃科学学报,2010, **22**(1):138-141. (ZHANG Tong, SUN Jian-ping, JI Ri-chen, et al. Analysis of mechanical characteristics of the through CFST arch bridge[J]. *Journal of Gansu Sciences*, 2010, **22**(1):138-141. (in Chinese))
- [9] 施洲,苏威风,郭俊丽,等.飞燕式拱桥结构静动力特性分析[J].重庆交通大学学报(自然科学版),2013, **32**(S1): 873-878. (SHI Zhou, SU Wei-feng, GUO Jun-li, et al. Static and dynamic analysis on fly-swallow type arch bridge[J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)*, 2013, **32**(S1):873-878. (in Chinese))
- [10] Yi Z P, Yuan M, Tu G Y, et al. Modeling of the multi-cable supported arch and a novel technique to investigate the natural vibratory characteristics[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, **75**:640-662.
- [11] 芮筱亭.多体系统发射动力学及其应用[J].中国工程科学,2011, **13**(10): 4-17. (RUI Xiao-ting. Launch dynamics of multibody system and its applications [J]. *Engineering Sciences*, 2011, **13**(10): 76-82. (in Chinese))
- [12] 芮筱亭,戎保.多体系统传递矩阵法研究进展[J].力学进展,2012, **42**(1): 4-17. (RUI Xiao-ting, RONG Bao. Advances in transfer matrix method for multi-body system dynamics[J]. *Advances in Mechanics*, 2012, **42**(1): 4-17. (in Chinese))
- [13] 解维东.拱桥和斜拉梁动力学建模理论暨面内自由振动研究[D].湖南大学,2016. (XIE Wei-dong. Dynamic Modeling Theory of Arch Bridge and Cable-Stayed Beam and Research on In-Plane Free Vibration [D]. Hunan University, 2016. (in Chinese))
- [14] Su X Y, Kang H J, Guo T D, et al. Dynamic analysis of the in-plane free vibration of a multi-cable-stayed beam with transfer matrix method [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, **89**(12):2431-2448.
- [15] 康厚军,苏潇阳,龚平,等.漂浮式独塔斜拉桥竖弯刚度评估新方法[J].湖南大学学报(自然科学版)2017, **44**(11): 126-134. (KANG Hou-jun, SU Xiao-yang, GONG Ping, et al. A new method for vertical bending stiffness evaluation of floating single-tower cable-stayed bridge [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2017, **44**(11):126-134. (in Chinese))
- [16] 龚平,苏潇阳,蔡向阳,等.拉索对斜拉桥竖向频率的影响研究[J].振动工程学报,2018, **31**(6): 957-965. (GONG Ping, SU Xiao-yang, CAI Xiang-yang, et al. The influence of cables on vertical frequency of cable-stayed bridge[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, **31**(6):957-965. (in Chinese))
- [17] 苏潇阳,康厚军,丛云跃.混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估动力学理论[J].动力学与控制学报,2020, **18**(4): 26-32. (SU Xiao-yang, KANG Hou-jun, CONG Yun-yue. Dynamic theory for evaluation on vertical bending stiffness of multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, **18**(4):26-32. (in Chinese))
- [18] 吉伯海,高建明,张杰.传递矩阵法在钢斜拉桥结构计算中的应用[J].东南大学学报(自然科学版),2004, **34**(6): 838-841. (JI Bo-hai, GAO Jian-ming, ZHANG Jie. Structural calculation of steel cable-stayed bridges with transfer matrix method[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2004, **34**(6):838-841. (in Chinese))
- [19] 刘利,康厚军,苏潇阳,等.拱暨索拱面内稳定性研究的传递矩阵法[J].计算力学学报,2020, **37**(1): 98-107. (LIU Li, KANG Hou-jun, SU Xiao-yang, et al. Transfer matrix method for studying the in-plane stability of arch and cable-arch[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(1): 98-107. (in Chinese))
- [20] Su X Y, Kang H J, Guo T D, et al. Modeling and parametric analysis of in-plane free vibration of a floating cable-stayed bridge with transfer matrix method [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, **20**(1):2050004.

## Transfer matrix method of in-plane eigenvalues during cantilever construction of arch bridge

KANG Hou-jun<sup>\*1,2</sup>, ZHU Guo-jing<sup>1</sup>, SU Xiao-yang<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract:** The transfer matrix method is used to solve the in-plane eigenvalue problem during the cantilever construction of arch bridges, and an evaluation method for solving in-plane vertical bending stiffness during construction of this type of bridge is established. Firstly, the cables and arches are regarded respectively as tensioned strings with no sag and Euler Bernoulli beams, and the total transfer matrix of the system is derived based on the basic theory of the transfer matrix method, and then the frequencies and modes of the system are calculated by considering the eigenvalue equation of the system combining the boundary conditions of the arch and the cables and the displacement of the cable-arch nodes. Meanwhile, the finite element analysis software ANSYS 15.0 was used to establish the finite element model of an arch bridge in the closed state and obtain the frequencies and modes solution. The comparison of results of the proposed method in this paper and the finite element method shows the correctness of the present method and model in this paper. Then, the above-mentioned theoretical method and finite element method are applied to analyze and compare the frequencies and modes of the half-span model before the arch bridge is closed. The consistent results of the two method further illustrate the correctness of the method and model in this paper. Finally, the modulus of elasticity and the initial force of the cables, the radius of the arch bridge and other parameters are selected as factors that affect the natural frequencies of the structure. A systematic parametric analysis of the first six-order frequencies of the model is carried out, and the influence principle of the design parameters of the arch bridge and of the cables in the closed state on the dynamic performance of the structure is obtained, and the corresponding improvement measures for the actual project are given.

**Key words:** cable-arch model; transfer matrix method; free vibration; frequency; finite element method

---

引用本文/Cite this paper:

康厚军,朱国敬,苏潇阳.拱桥悬臂施工过程中面内特征值的传递矩阵法[J].计算力学学报,2022,39(2):198-208.

KANG Hou-jun,ZHU Guo-jing,SU Xiao-yang. Transfer matrix method of in-plane eigenvalues during cantilever construction of arch bridge[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2022,39(2):198-208.