

DOI: 10.7511/jslx20210115002

基于 S-A 湍流模型的 Runge-Kutta 有限元算法

曹鹏程¹, 廖绍凯^{1,2}, 张研^{*3}, 陈达³

(1. 嘉兴学院 建筑工程学院, 嘉兴 314001; 2. 河海大学 力学与材料学院, 南京 211100;
3. 河海大学 港口海岸与近海工程学院, 南京 211100)

摘要:采用一方程 S-A 模型(Spalart-Allmaras 模型)封闭雷诺时均 N-S 方程(RANS 方程)进行湍流数值计算, 可以减少方程求解数量, 节约计算时间。本文对其进行了有限元数值算法研究, 首先通过沿流线坐标变换, 得到无对流项 RANS 方程, 并引入三阶 Runge-Kutta 法对其进行时间离散; 然后利用沿流线的 Taylor 展开解决坐标变换带来的网格更新的困难; 最后采用 Galerkin 法进行空间离散, 得到湍流模型的有限元算法。基于方柱绕流和覆冰输电线绕流模型, 与试验结果进行对比, 验证了该算法的有效性, 与一阶数值算法相比, 该算法在精度和收敛性方面更具优势。

关键词:S-A 方程; RANS 方程; Runge-Kutta 法; 有限元; 方柱; 覆冰输电线

中图分类号: O242.1; O357.1

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2022)02-0185-07

1 引言

数值模拟钝体湍流绕流问题主要有直接数值模拟法(DNS 法)、大涡模拟法(LES 法)和基于雷诺时均方程模拟法(RANS 法)三种方法^[1]。相关数值算法的研究已成为众多学者的研究热点。

DNS 法能够提供精确的解决方案, 但是所需网格必须小于或等于流场中最小的漩涡结构尺寸, 对计算机容量要求极高, 计算量巨大, 限制了其广泛应用^[2]。LES 法的计算效率相比 DNS 法要提高很多, 已成功应用于求解各种形状的湍流绕流问题^[3], 但近壁区域仍需要非常精细的网格。RANS 法可在较低的计算成本下实现高雷诺数下的湍流计算^[4]。与二方程 RNG $k-\epsilon$ 模型、修正的 $k-\epsilon$ 模型^[5]和 $k-\omega$ 模型^[6]相比, 一方程 S-A 模型^[7]具有求解方程较少的优点, 可进一步降低计算成本。

近年来, 基于一方程 S-A 模型的 RANS 法已成功求解了圆柱绕流和方柱绕流问题^[8,9], 并大量运用在覆冰输电线绕流数值计算中^[10,11]。目前求解 RANS 方程主要采用基于特征线分裂法(CBS 法)和迎风有限元法(SUPG 法), 以克服方程中的

非线性项带来的数值振荡问题。值得注意的是, 这些算法在时间离散上采用一阶离散格式^[8,9], 因此, 探索高阶离散格式和减少刚度矩阵的更新次数以提高计算精度、效率和收敛性, 有待于进一步研究。

本文将基于一方程 S-A 模型封闭 RANS 方程, 采用沿均匀流线的坐标变换, 消除其非线性项, 采用沿均匀流线的三阶 Runge-Kutta 法进行时间离散, 采用 Galerkin 法进行空间离散, 提出求解湍流模型的有限元算法。通过经典的算例, 进一步验证算法的有效性、精度和收敛性。

2 基于 S-A 模型的有限元格式

2.1 控制方程

二维非定常不可压缩流的无量纲 RANS 方程和 S-A 模型的标量方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1 + v_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \bar{v} + \frac{1}{Re \sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1 + \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \right\} - \frac{c_{w1} f_w}{Re} \left(\frac{\bar{v}}{d} \right)^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中 涡粘系数 v_t 通过辅助标量场 \bar{v} 获得, 即

$$v_t = \bar{v} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$
$$\chi = \bar{v}, \quad \tilde{S} = S + (\bar{v} f_{v2}) / (Re \kappa^2 d^2)$$

收稿日期: 2021-01-15; 修改稿收到日期: 2021-04-23.

基金项目: 国家自然科学基金(51579088; 51509081; 51779087); 教育部产学研项目(201802072007); 嘉兴市科技计划项目(2020AD30027); 浙江省教育厅一般科研项目(Y202045351)资助项目。

作者简介: 张研*(1979-), 男, 博士, 教授
(E-mail: yan.zhang@hhu.edu.cn).

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)$$

$$f_w = g[(1 + c_{w3}^6)/(g + c_{w3}^6)]^{1/6}$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r), r = \bar{v}/(R_e \tilde{S} \kappa^2 d^2)$$

$$c_{b1} = 0.1355, \sigma = 2/3, c_{b2} = 0.622$$

$$\kappa = 0.41, c_{w1} = c_{b1}/\kappa^2 + (1 + c_{b2})/\sigma$$

$$c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2, c_{v1} = 7.1$$

由于式(1)含有非线性对流项,为非自伴随算子,当采用标准的 Galerkin 有限元方法进行空间离散时,得不到最优解。因此,采用经时间间隔 Δt 沿流线的坐标变换^[12],得到无对流项表达式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x'_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{s'} = -\frac{\partial p}{\partial x'_i} + \frac{1+v_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x'_j \partial x'_j} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \Big|_{s'} = -c_{b1} \tilde{S} \bar{v} + \frac{1}{Re\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[(1+\bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x'_j} \right] + c_{b1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x'_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x'_j} \right\} - \frac{c_{w1} f_w}{Re} \left(\frac{\bar{v}}{d} \right)^2 \end{cases} \quad (2)$$

式中 x'_i 和 s' 为粒子经时间间隔 Δt 后的直角坐标和弧坐标。

2.2 时间离散

现引入中间辅助速度 u_i^* ,并将式(2)的动量方程分裂为

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \Big|_{s'} = \frac{1+v_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x'_j \partial x'_j}, \quad \frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} \Big|_{s'} = -\frac{\partial p}{\partial x'_i} \quad (3,4)$$

式中 $u_i = u_i^* + \Delta u_i$, 式(3,4)忽略了含有速度修正项 Δu_i 的高阶小项。

为了提高计算精度,基于沿均匀流线的三阶 Runge-Kutta 法对式(3)进行时间离散。假定已知 t^n 时刻流场的速度和压力,则在给定的时间步长 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, t^{n+1} 时刻中间辅助速度为

$$u_i^{n+1} = u_i|_{s_1-ds_1} + \frac{\Delta t}{6} (K_1|_{s_1-ds_1} + 4K_2|_{s_1-ds_1/2} + K_3^{n+1}) \quad (5)$$

$$K_1|_{s_1-ds_1} = \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x'^2_j}|_{s_1-ds_1} \quad (6)$$

$$K_2|_{s_1-ds_1/2} = \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x'^2_j}|_{s_1-ds_1/2}^{n+1/2} \quad (7)$$

$$K_3^{n+1} = \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i^{n+1}}{\partial x'^2_j} \quad (8)$$

式中 将 t^{n+1} 时刻所处的位置 s_1 定义为静坐标,其余时刻则为动坐标, ds_1 为粒子流线轨迹长度。表达式的右上标表示时刻,右下标表示空间位置,体现出时间和空间属性。为表达方便,所有静坐标下的变量均省略其右侧上标和下标,如 K_3^{n+1} 表示 t^{n+1} 时刻在位置 s_1 的速度斜率。

现对流线 $ds_1 = \bar{U} \Delta t$ 采用均匀化表示,其中

$$\bar{U} = U^n - \frac{U^n}{2} \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial s} + o(\Delta t^2) \quad (9)$$

利用沿均匀流线的 Taylor 展开,并忽略其中的高阶小量,式(5~7)的相关动坐标系下的量转化为静坐标系下的量为

$$u_i|_{s_1-ds_1}^n = u_i^n - \Delta t u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right) \quad (10)$$

$$K_1|_{s_1-ds_1}^n = \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} \quad (11)$$

$$K_2|_{s_1-ds_1/2}^{n+1/2} = \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i^{n+1/2}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (12)$$

式中 预测速度 $u_i^{n+1/2}$ 采用 Euler 法求得,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1/2} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{8} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

将式(10~12)代入式(5),可得中间辅助速度为

$$\begin{aligned} u_i^{*n+1} &= u_i^n - \Delta t u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right) + \\ &\quad \Delta t \frac{1+\nu_t}{6Re} \frac{\partial^2 (u_i^n + 4u_i^{n+1/2} + u_i^{*n+1})}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (14)$$

基于式(4),可得 t^{n+1} 时刻的速度为

$$u_i^{n+1} = u_i^{*n+1} - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (15)$$

显然,求解式(15)前,需先求解 t^{n+1} 时刻的速度。为此,对式(15)两边取散度,并考虑 t^{n+1} 时刻的不可压缩条件,可得压力 Poisson 方程为

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^{*n+1}}{\partial x_i} \quad (16)$$

式(13,14)的湍流涡粘系数需通过求解式(2)的辅助标量场 \bar{v} 而求得。式(2)采用沿均匀流线的 Euler 法进行时间离散,得

$$\begin{aligned} \bar{v}^{n+1} &= \bar{v}^n - \Delta t u_j \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j^n \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial x_j} \right) + \\ &\quad \Delta t \left\{ c_{b1} \tilde{S} \bar{v}^n + \frac{1}{Re\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1+\bar{v}^n) \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial x_j} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. c_{b2} \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial x_j} \right\} - \frac{c_{w1} f_w}{Re} \left(\frac{\bar{v}^n}{d} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

2.3 空间离散

采用 Galerkin 法对式(13~17)进行空间离散。单元中的变量 u_i, p 和 \bar{v} 均采用同阶插值函数表达为

$$u_i = \psi^T \tilde{u}_i, \quad p = \psi^T \tilde{p}, \quad \bar{v} = \psi^T \tilde{v} \quad (18)$$

式中 \tilde{u}_i, \tilde{p} 和 \tilde{v} 分别为该单元节点速度、压力和湍流标量列向量, ψ 为单元插值函数。

权函数采用式(18)的单元插值函数,乘以式(13,14,17)的两侧,并在计算域中进行空间积分,可得其弱积分格式为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} = & \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{N}+\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t^2}{8}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}_i^n + \\ & \frac{\Delta t}{2}\mathbf{S}_1 + \frac{\Delta t^2}{8}\mathbf{S}_2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_i^{*n+1} = & \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_i^n - \Delta t \left[\mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}}_i^n + \frac{\mathbf{D}}{6}(\tilde{\mathbf{u}}_i^n + 4\tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} + \right. \\ & \left. \tilde{\mathbf{u}}_i^{*n+1}) \right] - \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}_i^n + \Delta t\mathbf{S}_1 + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{S}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = & \mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^n - \Delta t\mathbf{N}\tilde{\mathbf{v}}^n - \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}^n - \Delta t\mathbf{D}_v\tilde{\mathbf{v}}^n + \\ & \Delta t\mathbf{S}_v\tilde{\mathbf{v}}^n + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{S}_2 + \Delta t\mathbf{S}_3 \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^T d\Omega, \quad \mathbf{N} = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_i^n \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial x_i} d\Omega \\ \mathbf{D} = & \int_{\Omega^e} \frac{1+\nu_t}{Re} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial x_i} d\Omega, \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_j} u_j^n u_k^n \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial x_k} d\Omega \\ \mathbf{S}_1 = & \int_{\Gamma^e} \frac{1+\nu_t}{Re} \boldsymbol{\psi} \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} n_j d\Gamma, \quad \mathbf{S}_2 = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi} u_j^n u_k^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_k} n_j d\Gamma \\ \mathbf{D}_v = & \int_{\Omega^e} \frac{1+\bar{\nu}^n}{Re\sigma} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial x_i} d\Omega, \quad \mathbf{S}_3 = \int_{\Gamma^e} \frac{1+\bar{\nu}^n}{Re\sigma} \boldsymbol{\psi} \frac{\partial \bar{\nu}^n}{\partial x_j} n_j d\Gamma \\ \mathbf{S}_v = & \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi} \left(c_{b1} \tilde{S} \boldsymbol{\psi}^T + \frac{c_{b2}}{Re\sigma} \frac{\partial \bar{\nu}^n}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial x_j} - \frac{c_{w1} f_w}{Re d^2} \tilde{\mathbf{v}}^n \boldsymbol{\psi}^T \right) d\Omega \end{aligned}$$

类似地,对式(15,16)加权积分后的弱积分形式为

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_i^{*n+1} - \Delta t \mathbf{G}_i \mathbf{p}^{n+1} \quad (22)$$

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{p}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{G}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^{*n+1} + \mathbf{L} \quad (23)$$

式中 $\mathbf{G}_i = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\psi} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial x_i} d\Omega$, $\mathbf{L} = \int_{\Gamma^e} \boldsymbol{\psi} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} n_j d\Gamma$ 。

至此,获得了基于S-A模型的沿均匀流线的三阶Runge-Kutta法时间离散的有限元格式,其求解步骤归纳如下。

(1) 通过动量方程(19),求得 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度 $u_i^{n+1/2}$ 。

(2) 基于Runge-Kutta法的方程(20),求得 t^{n+1} 时刻的中间辅助速度 u_i^{*n+1} 。

(3) 通过压力Poisson方程(23),求得 t^{n+1} 时刻的压力 p^{n+1} 。

(4) 基于速度修正方程(22),求得 t^{n+1} 时刻的速度 u_i^{n+1} 。

(5) 基于湍流标量方程(21),求得 t^{n+1} 时刻的湍流标量场 $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$ 。

(6) 通过 $\nu_t = \bar{\nu} f_{v1}$,求湍流涡粘系数 ν_t 。

(7) 返回步骤(1)继续下一个时刻的计算。

3 算例应用与验证

3.1 方柱绕流

在流体动力学领域,方柱绕流是经典的湍流数值计算案例。文献[13-15]进行了实验研究,并获得了阻力系数、升力系数、Strouhal数和压力系数。Shimada等^[16]采用两方程 $k-\epsilon$ 模型进行了相关的数值仿真模拟,文献[8,9]在S-A模型的基础上,提出了一阶时间离散有限元格式并进行了数值验算。下面将基于S-A模型的沿均匀流线的三阶Runge-Kutta法时间离散的有限元格式来模拟上述方柱绕流问题,以进一步验证该方法的有效性和计算精度。

典型的方柱无量纲模型和边界条件如图1所示,其中以方柱的边长取为特征尺寸和以左侧的来流速度为特征速度进行无量纲化。本次模型的计算域取为 $\Omega = [-10, 25] \times [-10, 10]$,采用四边形四节点线性结构单元划分网格,网格数为41461,其中方柱近壁区域采用细网格进行划分,方柱表面布置了320个节点,表层单元厚度为0.002,方柱有限元模型如图2所示。

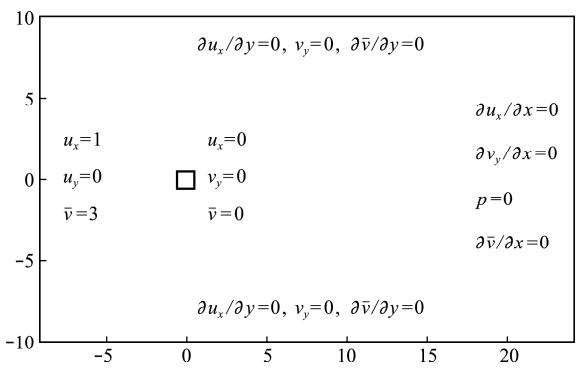


图1 方柱绕流模型和边界条件
Fig. 1 Model and boundary conditions of flow past a square cylinder

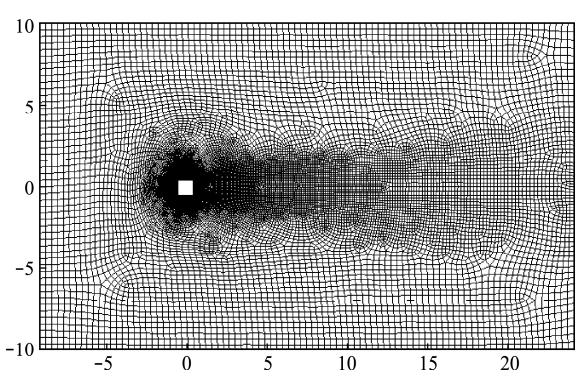


图2 方柱绕流有限元模型
Fig. 2 Finite model of flow past a square cylinder

上述模型通过 Matlab 编程实现, 数值计算得到了雷诺数为 22000 时方体的平均阻力系数 C_d 、均方根升力系数 C'_l 和 Strouhal 数, 列入表 1。方柱表面压力分布如图 3 所示。表 1 同时给出了文献[8,9,13-16]的实验和数值解。本文算法和文献[16]得到的平均阻力系数 C_d 和均方根升力系数 C'_l 与实验结果基本一致, 但本文算法得到的 Strouhal 数和平均压力系数分布更接近于实验结果, 且相比于文献[16]采用的二方程 $k-\epsilon$ 模型, 本文算法基于一方程 S-A 模型, 只需计算一个湍流封闭方程, 计算成本更低。与文献[8,9]的数值结果相比, 本文算法得到的平均阻力系数 C_d 、均方根升力系数 C'_l 和 Strouhal 数均更接近于实验结果, 表明本文算法基于沿均匀流线的三阶 Runge-Kutta 时间离散格式有利于提高数值解的计算精度。

表 1 方柱绕流气动力系数比较

Tab. 1 Comparisons of the aerodynamic coefficients of turbulent flow past a square cylinder

	$C_{d,\text{mean}}$	C'_l	S_t	单元数
Ref. [13](实验)	2.05~2.23		0.135	
Ref. [14](实验)	2.22	1.45	0.134	
Ref. [15](实验)	2.1	1.20	0.13	
Ref. [16]($k-\epsilon$)	2.05	1.43	0.141	
Ref. [9](一阶 S-A-SUPG)	2.04	1.24	0.133	67123
Ref. [8](一阶 S-A-CBS)	1.997	1.401	0.133	47608
本文算法	2.052	1.438	0.134	41461

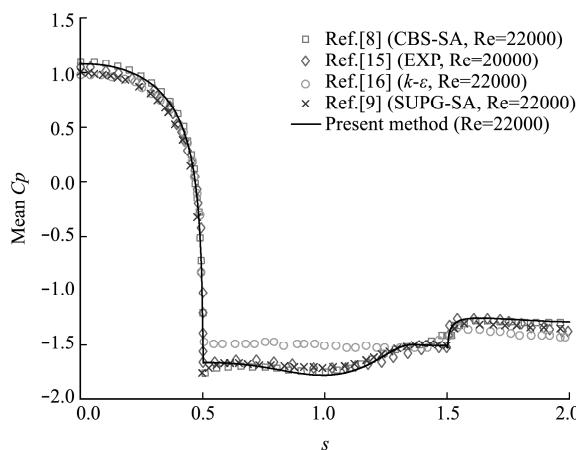
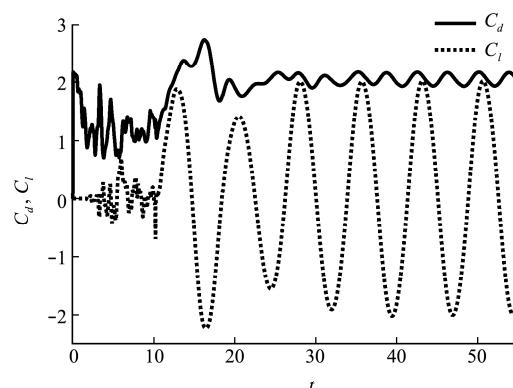


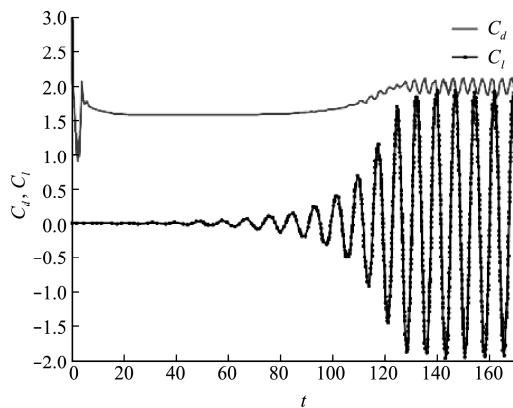
图 3 平均压力系数分布图比较

Fig. 3 Comparison of mean pressure coefficient distributions

图 4 给出了本文算法和文献[8]的阻力 C_d 和升力 C_l 时程曲线, 可以看出, 本文算法在无量纲时间 30 处已获得稳定的收敛解, 而文献[8]的无量纲收敛时间为 130, 说明本文算法有助于提高算法的收敛性, 具有较低的计算成本。



(a) 本文结果



(b) 文献[8]的结果

Fig. 4 Time history curves of C_d and C_l

3.2 覆冰输电线绕流

在冬季风、雨和雪冰冻等恶劣气象联合作用下, 覆冰输电线受到风激励作用后产生流致效应, 当满足特定条件后, 覆冰输电线会发生一种低频率、大振幅的自激振动, 严重威胁电力供应系统的安全运行。为此, 众多学者致力于输电线覆冰情况下的气动系数及其演化规律的研究, 可为舞动的判定提供基础性数据, 具有重要的科学意义。

参照国标(LGJ GB1179-83)的型号规定, 输电线为 LGJ-240(直径 $D = 26.8 \text{ mm}$)型号, 并采用文献[17,18]以固定尺寸的小圆描述覆冰外形的顶端, 小圆和输电线轮廓的大圆之间用切线连接描述覆冰的外形, 通过移动小圆来控制覆冰厚度的新月形模型, 本文考察覆冰厚度 $H = D$ 的情况, 如图 5 所示。

采用均匀来流风场, 空气密度为 1.25 kg/m^3 , 动力粘度系数为 $1.72 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 风速为 10 m/s 与文献[17]风洞试验的工况一致。通过以输电线圆心旋转覆冰输电线来表征风攻角, 如图 6 所示。

本文数值模拟风攻角 α 从 $0^\circ \sim 40^\circ$ ($\Delta\alpha = 10^\circ$)

的情况,并在气动力系数改变剧烈的地方进行加密计算。 0° 风攻角时覆冰输电线绕流无量纲化后的边界条件和网格如图7和图8所示。

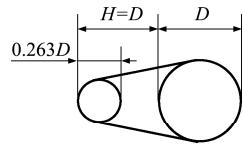


图5 新月形覆冰模型
Fig. 5 Model of crescent iced conductor

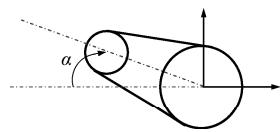


图6 风攻角
Fig. 6 Wind attack angle

$\partial u_x / \partial y = 0, v_y = 0, \partial \bar{v} / \partial y = 0$		
$u_x = 1$	$u_x = 0$	$\partial u_x / \partial x = 0$
$v_y = 0$	$v_y = 0$	$\partial v_y / \partial x = 0$
$\bar{v} = 3$	$\bar{v} = 0$	$p = 0$
$\partial u_x / \partial y = 0, v_y = 0, \partial \bar{v} / \partial y = 0$		

图7 覆冰输电线绕流边界条件
Fig. 7 Boundary condition for flow past a crescent iced conductor

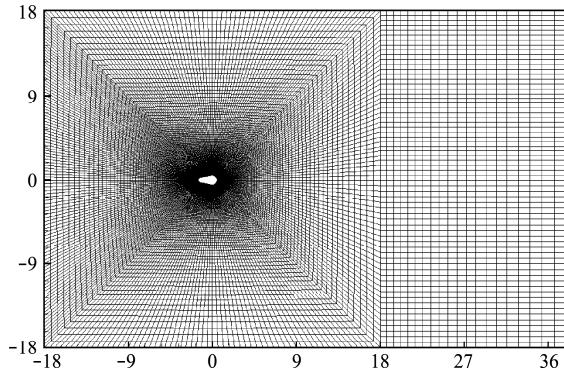
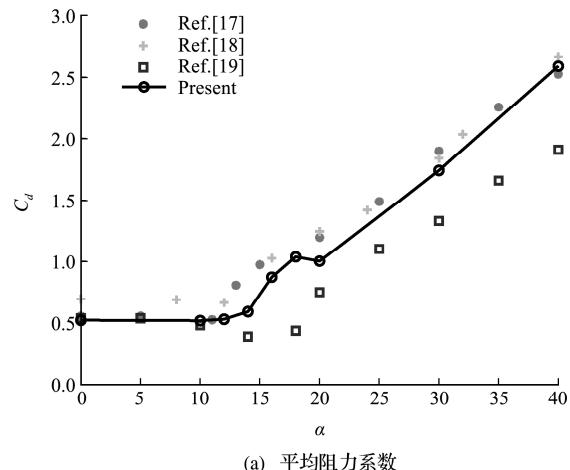


图8 覆冰输电线绕流网格划分
Fig. 8 Computational mesh for flow past a crescent iced conductor

图9为采用本文算法得到的 $1.0D$ 新月形覆冰输电线的平均阻力系数和平均升力系数随风攻角的变化关系,并将计算结果与已有的风洞试验和数值模拟结果对比分析。文献[17,19]通过风洞试验进行了相同风速下 $1.0D$ 覆冰厚度的输电线气动力系数的测定,Shinichi等^[18]基于LES模型对此进行了数值模拟。可以看出,本文的计算结果与

试验和文献[18]数值模拟的结果基本保持一致,并很好地展现了升力系数尖峰突跳现象,这种尖峰突跳现象将给输电线路的稳定性产生影响,严重时将产生舞动现象。



(a) 平均阻力系数

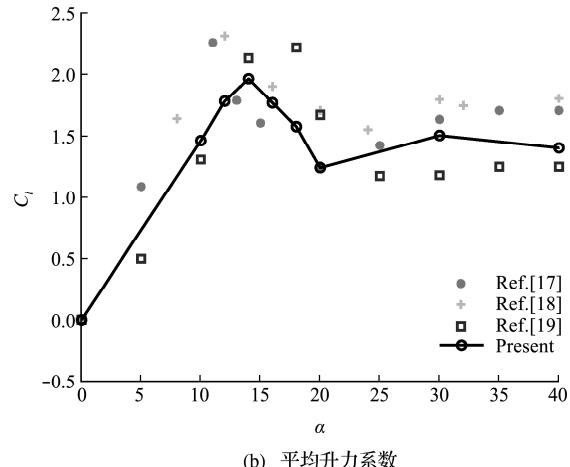


图9 气动力系数随风攻角的变化曲线比较
Fig. 9 Comparison of the variations of aerodynamic coefficients with wind attack angles

4 结 论

本文基于一方程S-A湍流模型封闭RANS方程求解湍流绕流问题。通过坐标变换得到了无对流项RANS方程,以使Galerkin法空间离散时获得最优解,时间离散时采用沿均匀流线的三阶Runge-Kutta进行离散,并利用Taylor展开将动作标系下的量转换成静坐标系下的量,建立了求解RANS方程的有限元算法。

基于本文有限元算法,数值模拟了经典的方柱绕流和覆冰输电线绕流问题。数值结果表明,得到的平均阻力系数和均方根升力系数与实验结果基本一致,且优于一阶时间离散算法的结果,表明该算法可以有效地预测湍流绕流问题,且有利于提高数值解的计算精度和收敛性。

参考文献(References) :

- [1] Speziale C G. Turbulence modeling for time-dependent RANS and VLES: A review[J]. *AIAA Journal*, 1998, **36**(2): 173-184.
- [2] Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, **30**: 539-578.
- [3] Lysenko D A, Ertesvag I S, Rian K E. Large-eddy simulation of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 2×10^4 [J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2014, **92**(3): 673-698.
- [4] Richmond-Bryant J. Verification testing in computational fluid dynamics: An example using reynolds-averaged Navier-Stokes methods for two-dimensional flow in the near wake of a circular cylinder[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, **43**(12): 1371-1389.
- [5] Joshi J B, Nere N K, Rane C V, et al. CFD simulation of stirred tanks: Comparison of turbulence models (Part II: Axial flow impellers, multiple impellers and multiphase dispersions) [J]. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2011, **89**(4): 754-816.
- [6] Tomboulides A, Aithal S M, Fischer P F, et al. A novel numerical treatment of the near-wall regions in the $k-\omega$ class of RANS models [J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2018, **72**: 186-199.
- [7] Spalart P, Allmaras S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows[A]. 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit [C]. 1992.
- [8] Han Z L, Zhou D, Tu J H, et al. Flow over two side-by-side square cylinders by CBS finite element scheme of Spalart-Allmaras model[J]. *Ocean Engineering*, 2014, **87**: 40-49.
- [9] Bao Y, Zhou D, Huang C, et al. Numerical prediction of aerodynamic characteristics of prismatic cylinder by finite element method with Spalart-Allmaras turbulence model[J]. *Computers & Structures*, 2011, **89**(3-4): 325-338.
- [10] 李新民, 朱宽军, 刘彬. 典型覆冰导线空气动力学特性数值和试验模拟[J]. 高电压技术, 2014, **40**(2): 427-433. (LI Xin-min, ZHU Kuan-jun, LIU Bin. Numerical and experimental simulation of aerodynamic characteristics of typical iced conductor [J]. *High Voltage Engineering*, 2014, **40**(2): 427-433. (in Chinese))
- [11] 肖良成, 李新民, 江俊, 等. 典型覆冰导线气动绕流计算及动态特性分析[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, **43**(4): 500-510. (XIAO Liang-cheng, LI Xin-min, JIANG Jun, et al. Simulation and analysis on aerodynamic characteristics of iced-conductors in typical shapes[J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2013, **43**(4): 500-510. (in Chinese))
- [12] 廖绍凯, 张研, 陈达. 粘性流基于特征线的四阶Runge-Kutta有限元法[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(2): 226-232. (LIAO Shao-kai, ZHANG Yan, CHEN Da. A characteristic-based four order Runge-Kutta finite element method for incompressible viscous flow [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(2): 226-232. (in Chinese))
- [13] Lyn D A. Phase-averaged turbulence measurements in the separated shear layer region of flow around a square cylinder[A]. Proceedings of the 23rd Congress of International Association for Hydraulic Research [C]. 1989.
- [14] Sakamoto H, Haniu H, Kobayashi Y. Fluctuating forces acting on rectangular cylinders in uniform flow (On rectangular cylinders with fully separated flow) [J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers (Series B)*, 1989, **55**(516): 2310-2317.
- [15] Bearman P W, Obasaju E D. An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, **119**: 297-321.
- [16] Shimada K, Ishihara T. Application of a modified $k-\epsilon$ model to the prediction of aerodynamic characteristics of rectangular cross-section cylinders[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2002, **16**(4): 465-485.
- [17] Shimizu M. A wind tunnel study on aerodynamic characteristics of ice accreted transmission lines[A]. 5th International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications[C]. 2008.
- [18] Oka S, Ishihara T. Numerical study on steady aerodynamic characteristics of ice accreted transmission lines [A]. 5th Computational Wind Engineering[C]. 2010.
- [19] 楼文娟, 林巍, 黄铭枫, 等. 不同厚度新月形覆冰对导线气动力特性的影响[J]. 空气动力学学报, 2013, **31**(5): 616-622. (LOU Wen-juan, LIN Wei, HUANG Ming-feng, et al. The impact of ice thickness on the aerodynamic characteristics of crescent shape iced conductors[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2013, **31**(5): 616-622 (in Chinese))

A Runge-Kutta finite element algorithm based on the S-A turbulent model

CAO Peng-cheng¹, LIAO Shao-kai^{1,2}, ZHANG Yan^{*3}, CHEN Da³

(1. College of Engineering&Architecture, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China;

2. College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, China;

3. College of Harbour, Coastal and Offshore Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: In the numerical calculation of turbulence, in order to reduce the number of solved equations and save computational cost, one-equation Spalart-Allmaras model is used to close Reynolds-averaged N-S equation. The research on turbulent numerical algorithm is carried out. Firstly, RANS equation without the convection term is obtained by coordinate transformation along streamlines, and the third-order Runge-Kutta method is introduced to discretize it in time. Then the Taylor expansion along streamlines is used to overcome the difficulty of mesh updating caused by the coordinate transformation. Finally, based on the Galerkin space discretization, the finite element algorithm of turbulence model is obtained. The numerical simulations of flow past a square cylinder and flow past an iced conductor are performed. Compared with the experimental results, the effectiveness of this algorithm is verified. Compared with the first-order algorithms, this algorithm has more advantages in accuracy and convergence.

Key words: S-A equation; RANS equation; Runge-Kutta method; finite element; square cylinder; iced conductor

引用本文/Cite this paper:

曹鹏程,廖绍凯,张研,等. 基于S-A湍流模型的Runge-Kutta有限元算法[J]. 计算力学学报,2022,39(2):185-191.

CAO Peng-cheng, LIAO Shao-kai, ZHANG Yan, et al. A Runge-Kutta finite element algorithm based on the S-A turbulent model[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, 39(2): 185-191.