

基于二次型性能指标定轴转动板减振拓扑优化

张君茹, 程耿东*

(大连理工大学 工程力学系, 大连 116024)

摘要:研究在给定材料体积的条件下绕定轴旋转的平板结构的拓扑优化设计, 以使受到冲击荷载后平板结构的振动最小, 采用积分形式的二次型性能指标为目标函数, 以单元人工密度为设计变量建立拓扑优化列式。假定板结构在面内以常速旋转并考虑小应变假设, 采用多体动力学理论和有限元方法建立运动微分方程。使用李亚普洛夫第二方法将积分形式的二次型性能指标简化, 使用伴随法求解敏感度并结合振型叠加法提高分析和优化的效率。数值结果表明, 所提出的拓扑优化方法可实现旋转板减振设计, 得到与频率拓扑优化有区别的拓扑构型。展示了基于二次型指标的优化解、其拓扑构型的材料分布和基频随转速增加的变化以及边界条件和冲击点或者观察点的位置及板尺寸对优化解的影响。

关键词:旋转板; 残余振动减振; 二次指标; 拓扑优化; Lyapunov 第二方法

中图分类号: O242.1; O189.1

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2022)02-0135-07

1 引言

旋转结构在工业中有着广泛的应用, 如涡轮发动机、直升机、风力发动机叶片和旋转太阳帆。当旋转结构工作时, 可能会受到外界环境的干扰或者冲击, 如异物撞击或者砂粒等^[1,2], 从而产生偏离正常运行的振动, 影响旋转结构的正常功能, 研究冲击荷载下的旋转结构减振问题是十分有必要的。

旋转结构动力学理论研究工作从研究旋转梁的动力学特性和响应起步, 单杆机械臂或者叶片的结构分析和优化是以梁结构的研究为基础^[3-5], 但是梁结构不能很好地模拟具有低展弦比的结构, 在很多应用中, 研究旋转板的动力学特性和优化方法更合理必要。旋转板建模方法的主流方法有浮动坐标法和绝对节点法两类。基于浮动坐标法, 文献[6,7]研究了旋转薄板的动力学响应和模态特性, Hashemi 等^[8]研究了旋转厚板的动力学响应和模态特性。赵将等^[9]基于绝对节点法研究了旋转薄板的频率和模态特性, 但是在处理斜率不连续问题时仍然需要进一步研究^[10], 优化设计过程中出现相邻单元密度不相等造成斜率不连续情况。本文采用浮动坐标法建立平面旋转板的多体动力学数学模型。

旋转板结构的减振优化设计和研究工作相对

少见。刘利军等^[11]研究了转动 ACLD 悬臂板的动力学建模及主动约束层阻尼层的振动控制。孙家亮等^[12]基于移动可变形组件法(MMC)和绝对节点法(ANCF)研究了旋转薄板频率拓扑优化方法。

动力学减振优化的研究按照目标函数或者约束函数分为两类。一类是基于结构动力学特性如频率或者模态, 这方面的工作很多; 另一类是基于动力学响应。Kang 等^[13]综述了基于响应的优化工作, 指出基于结构响应的优化问题需要求解每个时间积分步上的动力学响应, 求解每个时间步响应的敏感度十分耗费时间。基于动力学响应但不考虑每一个时刻的响应, 赵君鹏等^[14]提出基于响应的积分形式目标函数, 阎琨等^[15,16]使用积分形式的二次指标作为目标函数, 使用李亚普洛夫方法将该指标简化, 并使用伴随法计算该指标的敏感度, 求解了受冲击荷载板结构阻尼拓扑优化。

本文结合多体动力学理论和有限元方法推导了常速旋转板的面内振动动力学方程, 并采用二次型性能指标作为目标函数, 结合李亚普洛夫方法, 建立以单元人工密度作为设计变量的 SIMP(Solid Isotropic Material with Penalty)结构拓扑优化列式, 研究在给定材料体积的条件下, 受到冲击荷载作用的旋转板的拓扑优化减振设计。本文还讨论了以二次型性能指标和以基频为目标的优化设计的异同, 发现在远端有环向支撑时, 板基频最大的设计是重频率设计, 但是, 以二次型性能指标作为目标函数的优化设计没有重频。

收稿日期: 2021-01-16; 修改稿收到日期: 2021-02-18.

基金项目: 国家自然科学基金(11821202)资助项目.

作者简介: 程耿东*(1941-), 男, 博士, 教授
(E-mail: chenggd@dlut.edu.cn).

2 垂直于旋转轴的平板动力学方程

2.1 浮动坐标法下广义位置坐标

考虑板以 Z 轴为旋转轴在平面内大范围转动，并假设发生的面内变形是小变形，使用平面应力板单元来离散板结构和模拟板的变形^[8]。任取板中一点 P ，点 P 到板结构坐标系 $O_b X_b Y_b$ 原点 O_b 的位置矢量为 \mathbf{u}_P ，点 P 到全局坐标系 OXY 原点 O 的位置矢量为 \mathbf{r} ，点 O_b 在全局坐标系 OXY 的位置矢量为 \mathbf{R} ，旋转板绕 Z_b 轴旋转 θ 角，点 P 发生的变形为 \mathbf{u} 。则 P 点全局位置矢量 \mathbf{r} 表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{T}(\mathbf{u}_P + \mathbf{u}) \quad (1)$$

式中 \mathbf{T} 为板结构坐标系和全局坐标系之间的坐标转换矩阵，其表达式及对时间的微分 $\dot{\mathbf{T}}$ 为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{T} \dot{\theta} \quad (2)$$

点 P 变形表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}_e \quad (3)$$

式中 平面应力板单元自由度 \mathbf{q}_e 和形函数 \mathbf{N} 的表达式参见文献[17]。旋转板结构上任意点 P 的全局位置矢量 \mathbf{r} 由广义位置坐标 \mathbf{q}_P 唯一确定表示

$$\mathbf{q}_P = [\mathbf{R}^T \ \theta \ \mathbf{q}_e^T]^T \quad (4)$$

式中 结构自由度 \mathbf{q} 由单元自由度 \mathbf{q}_e 组集而成。

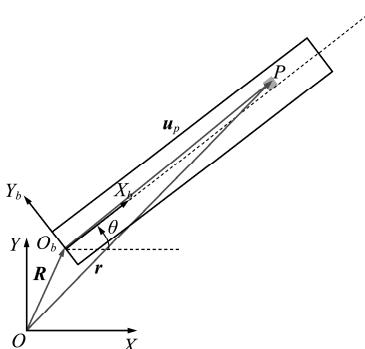


图 1 板中任取点 P 的位置

Fig. 1 Position of any point P in the plate

2.2 旋转板的质量和刚度矩阵

点 P 速度由该点的位置矢量对时间求导得

$$\dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{I} \ \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{T}(\mathbf{u}_P + \mathbf{N} \mathbf{q}_e) \ \mathbf{T} \mathbf{N}] \dot{\mathbf{q}}_P \quad (5)$$

式中 $\dot{\mathbf{r}}$ 为广义位置坐标 \mathbf{r} 对时间的微分，形函数矩阵 \mathbf{N} 需要扩展为结构尺度。

旋转板的动能和质量矩阵表示为

$$T = \frac{1}{2} \sum_e h \int_{\Omega_e} \dot{\mathbf{r}}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} \rho_e d\Omega = \frac{1}{2} \sum_e (\dot{\mathbf{q}}_P^T \mathbf{M}(\mathbf{q}_P) \dot{\mathbf{q}}_P)^e \quad (6)$$

式中 $\mathbf{M}(\mathbf{q}_P)$ 为结构有限元模型的单元质量矩阵，其分量表达式参见文献[17]。

板的弹性势能和刚度矩阵可以表示为

$$U = \frac{1}{2} \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h d\Omega = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}^e \mathbf{q}_e \quad (7)$$

式中 应变矩阵 \mathbf{B} 和弹性矩阵 \mathbf{D} 参见文献[18]。

2.3 稳定旋转板受冲击扰动动力学方程

动力学问题的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_P} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_P} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_P} = \mathbf{0} \quad (8)$$

将动能和弹性势能代入式(8)得到旋转板动力学方程。考虑板定轴旋转， \mathbf{R} 和 $\dot{\mathbf{R}}$ 都为零矢量。由于 $\ddot{\mathbf{R}}$ 和 $\dot{\theta}$ 指定，式(8)只对未知 \mathbf{q} 进行求导得

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (2\dot{\theta} \mathbf{G} + \mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \dot{\theta}^2 \mathbf{M} - \ddot{\theta} \mathbf{G}) \mathbf{q} = \\ F_1 + F_2 \\ \mathbf{q}(t=0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t=0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}$ 分别为结构自由度 \mathbf{q} 的速度和加速度， \mathbf{q}_0 和 $\dot{\mathbf{q}}_0$ 分别为板的初始位移和初始速度。方程(9)的矩阵可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_e \mathbf{M}_{\mathbf{q}_e \mathbf{q}_e}, \quad \mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1(\ddot{\theta}), \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2(\dot{\theta}^2) \\ \mathbf{G} &= \sum_e \mathbf{G}^e, \quad \mathbf{G}^e = \rho_e h \int_{\Omega_e} (\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{N})^T \cdot \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 \mathbf{M} 为板的质量矩阵，由单元质量矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{q}_P)$ 中与结构自由度相关的 $\mathbf{M}_{\mathbf{q}_e \mathbf{q}_e}$ 组装而成， \mathbf{K} 矩阵为旋转板的刚度矩阵， $2\dot{\theta}\mathbf{G}$ 矩阵为与旋转结构的科氏力相关的陀螺反对称矩阵， \mathbf{F}_1 为与角加速度相关的离心惯性力， \mathbf{F}_2 为与角速度相关的离心惯性力。 \mathbf{C} 矩阵为旋转板的 Rayleigh 阻尼矩阵， α 和 β 为 Rayleigh 比例阻尼参数。对于频率为 ω_i 的振型，其相应阻尼比 ξ_i 与阻尼参数 α 和 β 的关系可表示为

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (i=1,2,\dots) \quad (11)$$

式中 结构的阻尼比 ξ 是与材料的性质或者应力的状态有关的，一般在 0.5%~15% 之间^[19]。本文采用 α 和 β 为 10 和 1e-5。使得对于本文算例，与基频相应的阻尼比落在此区间。

假定旋转板从初始启动后经过一段时间进入稳定旋转，转速 ω 为常数，在转动中设想受到外物碰撞、打击或者爆炸等作用时间极短的冲击，假设冲击后结构还处于未变形状态，并将冲击荷载简化为在板冲击点处施加冲击速度^[20]。受到冲击稳定旋转板的扰动动力学方程可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_d + (2\omega \mathbf{G} + \mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}}_d + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_d = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_d(t=0) = \mathbf{q}_{d0}, \quad \dot{\mathbf{q}}_d(t=0) = \dot{\mathbf{q}}_{d0} \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_d$ 分别为板受到冲击产生的扰动响应及扰动响应 \mathbf{q}_d 的速度和加速度。

将式(12)转化为状态方程,可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{d_0} \\ \mathbf{q}_{d_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}(2\omega\mathbf{G} + \mathbf{C}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中 \mathbf{A} 为状态矩阵, \mathbf{x} 为由扰动速度和扰动位移组成的状态向量。

3 旋转板的减振拓扑优化

研究均匀厚度为 h 的旋转板的拓扑优化,待设计的板结构所在的设计域为 Ω 。假定板的材料性质和边界条件、允许使用的板的材料体积、冲击荷载的位置和大小以及观察点的位置与方向都已经给定。稳定旋转板在受冲击后发生振动,本文目的优化结构的拓扑以降低观察点的振动。

3.1 以二次型性能指标为目标的优化列式

建立结构拓扑优化列式时,采用人工密度法 SIMP,将结构离散为有限元模型,每个单元的人工密度 $0 \leq \rho \leq 1$ 为设计变量,以二次型性能指标作为目标函数,该拓扑优化问题的数学列式可表示为

$$\min_{\rho} J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \quad (14a)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (14b)$$

$$(\sum_e \rho_e V_e)/V_{\max} \leq V_{\frac{1}{2}} \quad (14c)$$

$$\rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (e = 1, 2, \dots, n) \quad (14d)$$

式中 n 为单元个数, V_{\max} 为设计域铺满材料时的材料体积,体分比 $V_{\frac{1}{2}}$ 为允许使用的材料体积上限, ρ_{\min} 为防止矩阵奇异设置的最小密度,一般取为 $1e-6$ 。 J 为待最小化的二次型性能指标,该指标是从初始时刻到无穷区间上的时程积分,被积函数是结构中本文需要观察的点(或点集)的振动位移/速度的二次函数。对于正定的 \mathbf{Q} ,在给定初始条件下,该值越小,反映关注点的残余振动衰减越快。 \mathbf{Q} 的选取是根据本文需要观察其振动(位移或速度)的点在结构的位置,图 2 算例选取 \mathbf{Q} 的形式可表示为

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{u}_D^2 dt = \int_0^{\infty} [\dot{\mathbf{q}}_d]^T [\mathbf{0} \ \mathbf{0}] [\dot{\mathbf{q}}_d] dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \quad (15)$$

式中 \mathbf{u}_D 为人为选取受冲击板上观察点 D 在体坐标系下 Y_b 方向的扰动位移,冲击点和观察点可以相同或者不同,算例 1 中观察点 D 的位置如图 2 所示。 \mathbf{W} 为权系数矩阵,除了对角线上 $\mathbf{W}(u_D, u_D)$ 的值等于 1,其余元素均等于 0。在拓扑优化过程

中,材料的密度分布在不断发生变化,为了保证结构受到外界冲量恒定,在冲击点处设置不可设计域。

3.2 拓扑优化数值方法

由于优化列式(14)允许单元人工密度取 $0 \sim 1$ 的中间值,所以可以使用基于梯度的高效优化方法求解,但是最优结构的密度应该是 $0 \sim 1$ 分布,为此,SIMP 方法通常假定单元材料弹性模量和人工密度的关系为

$$E_e = E_{\min} + \rho_e^p (E - E_{\min}) \quad (16)$$

为了尽量减少在优化结果中出现大量的中间密度单元,通常将惩罚系数 p 取为 3,但是,对于静力柔度优化问题,已经证明 $p=3$ 时拓扑优化问题非凸,优化迭代可能落入局部最优解。此外,对于动力学问题, $p=3$ 也导致局部振型,需要特殊的处理方法。为了避免优化解出现棋盘格式等问题,需要采用线性密度过滤和非线性密度过滤等一系列变量变换,这样的方法称为三场 SIMP(three field SIMP)法^[21]。

本文采用 $p=3$ 及上述方法求解了一些例题,但是,由于本文研究的旋转结构动力学问题不同于结构静力分析,优化往往导致局部最优解。本文采用 $p=1$,除了减少了落入局部最优解的可能,还避免了局部振动模式,得到的中间密度在本问题中也可以解释为板的厚度取了中间值。为了解决优化解有灰色单元的情况,引入文献[14]包含灰度信息的加权目标函数为

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt + w \sum_e \rho_e (1 - \rho_e) / n \quad (17)$$

式中 w 为权系数,该值在优化过程中固定,为了统一量级,该值的计算方式取为初始设计的二次型指标除以灰度信息。

4 基于李亚普洛夫方法的拓扑优化列式和方法

为了求解式(14)的优化问题,使用基于敏感度的优化方法求解优化问题,需要高效的计算目标函数及其灵敏度的方法。式(15)目标函数是一个在无穷时间区间上的积分,需要时程分析和数值积分,计算目标及其灵敏度十分耗费时间。

4.1 李亚普洛夫方法第二方法

根据李亚普洛夫第二方法,对于渐近稳定的动力学系统,结构在初始时刻受到 $\mathbf{x}(0)$ 的冲击响应后,由于阻尼而使系统的振动逐渐减小,无穷时刻结构位移为 0,因此 $\mathbf{x}(\infty)$ 取为 0。经简单推导可以将式(14a)的目标函数转化为

$$J = \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (18)$$

式中 \mathbf{P} 矩阵是对称正定且满足式(19)的代数黎卡提(Riccati)方程,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (19)$$

式中 \mathbf{A} 矩阵为状态方程(13)的状态矩阵。利用式(18,19)可以把式(15)改写为目标函数容易计算的优化列式,不再需要时程积分。

4.2 振型叠加法

当结构划分为很多单元时,结构矩阵维度高,采用振型叠加法将高维矩阵缩减为低维矩阵,可缩短求解 \mathbf{P} 矩阵的时间。振型叠加法先求解模态方程,

$$-\omega_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

式中 ω_i 为第 i 阶频率, $\boldsymbol{\phi}_i$ 为第 i 阶模态。约定模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots]$ 相对于质量矩阵 \mathbf{M} 正交归一化,即 $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}$ 为单位阵。从模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 取出前 s 阶模态,称为缩减模态,形成矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_s$,并引入模态坐标 $\boldsymbol{\varphi}$,使用缩减模态可将板的响应近似为

$$\mathbf{q}_d \approx \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\phi}_k = \boldsymbol{\Phi}_s \boldsymbol{\varphi} \quad (21)$$

将式(20)代入式(13)得到缩减的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ \boldsymbol{\varphi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_s^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_{d0} \\ \boldsymbol{\Phi}_s^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{d0} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}(2\omega \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{C}}) & -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (22)$$

式中 $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{C}}$ 和 $\tilde{\mathbf{K}}$ 均是经过模态缩减的结构矩阵,如 $\tilde{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Phi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_s$, $\tilde{\mathbf{A}}$ 为模态缩减后的状态矩阵, $\tilde{\mathbf{x}}$ 为模态缩减后的状态向量。积分形式的目标函数(15)的响应 \mathbf{x} 也可使用模态坐标表示,式(15)目标函数的 \mathbf{Q} 矩阵转化为

$$J = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} dt, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_s^T \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi}_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 为模态缩减后的 \mathbf{Q} 矩阵。

结合李亚普洛夫方法和振型叠加法,旋转板拓扑优化列式(14)可转化为

$$\min_{\rho} J = \tilde{\mathbf{x}}(0)^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{x}}(0) \quad (24a)$$

$$\text{s.t. } \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{Q}} \quad (24b)$$

$$(14c \sim 14d) \quad (24c)$$

优化列式(24)只与初始条件相关,与每个时刻的响应无关,简单的代数表达式而非积分的指标带来非常大的便利。需要注意的是,由于和科氏力相关的陀螺矩阵 $\tilde{\mathbf{G}}$ 与模态向量并不正交,式(24b)并不能像文献[17]的对结构矩阵进行对角化后将黎卡提方程解耦。为了更加高效地求解灵敏度,本文采用伴随变量方法求解目标函数的敏感度^[17,18]。

5 算例

在动力学减振优化中常采用以最大化基频为目标函数减小结构的振动,本文则采用最小化二次型性能指标为目标函数。基频反映的是整个板结构的振动情况,二次型性能指标直接反映的是观察点处的振动情况。下面的第一个算例将比较和讨论不同转速下基于二次型性能指标的优化设计和基于最大化基频的优化设计。

5.1 算例参数、阻尼参数和缩减模态阶数选择

图 2 给出了旋转板的几何尺寸和工况。板长为 0.4 m, 宽为 0.1 m, 厚为 0.05 m, 密度为 2766.67 kg/m³, 弹性模量为 6.89×10^{10} Pa, 泊松比为 0.3, 体分比为 0.5。薄板结构绕 A 点以转速 ω 旋转,板的左端固定,右端点 B 和点 C 为滑动支座,允许板沿相对体坐标系的水平方向移动,即允许径向移动,但不允许其沿环向移位。在外径处有圆环提供支承的轮盘叶片就可以近似模拟成这样的结构。假定在板稳定旋转后,点 D 受到沿环向的初始冲击速度 v_0 , v_0 设置为 1 m/s, 初始扰动位移设置为 0。为了减小撞击点的位移,选取撞击点 D 为目标准函数的减振观察点,如式(15)所示。有限元分析时矩形板划分为 120×30 , 在撞击点处设置长宽各为 2 个单元、密度为 1 的不可设计域。

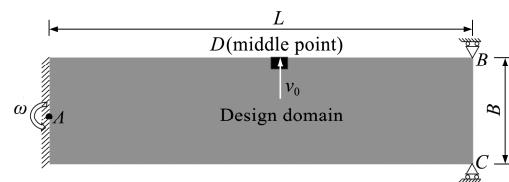


图 2 旋转板的几何尺寸和工况
Fig. 2 Geometry, load and boundary conditions

本文采用振型叠加法缩减黎卡提方程,缩减模态阶数选取越多,目标函数越精确,但选择过少的模态数会导致基于模态缩减的多体系统动力学拓扑优化中优化算法不收敛和灰色区域的出现^[22]。另一方面,选择的模态过多,缩减的结构矩阵和状态矩阵的规模越大,黎卡提方程求解时间越长。由前面讨论可知,高阶模态的频率如果使得相应的阻尼比 ξ 大于临界阻尼比 1, 相应模态的振动不再振荡,并不影响结构的功能。算例中选取的模态阶数使得选取模态的阻尼比都小于 1。经过计算,本算例前 30 阶模态的阻尼比都小于 1,故优化时选取 30 阶缩减模态。

5.2 优化结果

初始设计取满足约束条件的可行设计,采用国际单位制,目标函数在数值计算时乘以 10^{20} 。表2的第2~4行给出了不同转速下的最优指标值、优化结构的频率及其构型。第5行max Frquency给出了基频最大化的优化结构,这是一个基频为重频率的优化设计。最大化基频问题优化列式可表示为

$$\min_{\rho, \beta} -\beta \quad (25a)$$

$$\text{s.t. } -\omega_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (25b)$$

$$\beta \leqslant \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_r) \quad (25c)$$

$$(14c \sim 14d) \quad (25c)$$

式中 n_r 为计算时控制的特征值数,本文选为3,为了避免模态切换,采用了重特征值的灵敏度分析方法,具体细节参见文献[23]。

由表2可知,随着转速的增加,指标优化得到具有不同基频特性的指标设计。由表2第4列可知,转速0 rad/s和2000 rad/s的优化设计及其指标值或者基频都非常接近。当转速增加到4000 rad/s,优化设计端部的材料加强明显。最大基频设计在转速0 rad/s,2000 rad/s和4000 rad/s下的指标值分别为1854.85,1442.69和1564.16,比指标最小化设计的指标值大约50~60倍,说明对于本问题,基频优化设计并不是在冲击荷载下点D振动最小的设计。图3给出了初始设计和转速为2000 rad/s的指标设计在点D的残余振动的时程曲线,可以看出指标设计比初始设计的点D残余振动衰减要快,说明采用的最小化指标能够减小旋转结构的振动。由表2可知,基频最大设计和指标最小化设计的基频和构型不一样,这说明以二次型性能指标作为目标函数的优化设计没有重频。

表2 长宽比为4:1时指标设计和基频设计的比较

Tab. 2 Comparison of optimized solutions obtained by minimizing index or maximizing fundamental frequency for rectangular plate with aspect ratio of 4:1

Method	Objective	Frequency /rad·s ⁻¹	Configuration
min Index (0 rad/s)	31.02	9013.26	
min Index (2000 rad/s)	31.36	8970.50	
min Index (4000 rad/s)	32.09	9616.68	
max Frequency	—	15131.99	

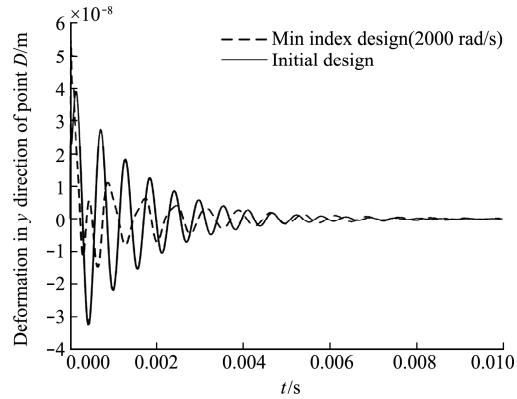


图3 转速为2000 rad/s时初始设计和指标设计点D的Y方向位移响应对比

Fig. 3 Comparison of displacement response in Y direction of D point between initial design and min index design at speed of 2000 rad/s

5.3 边长比、冲击点、观察点及支撑条件

对优化结果的影响

为了考虑边长比、冲击点、观察点及支撑条件对优化结果的影响,研究了图4列出的不同问题。图4(a)的边界条件不同于图2结构,该板远端自由,且在该端中点施加集中质量0.5 kg,其左端考虑了只有1/3边界固支和全部固支两种情况。表3给出了相应于这两种情况的优化设计,可以看出当左端部分固支时,相较于全部固支,指标设计的材料会向固支点移动。图4(b,c)的问题采用图2的算例参数,但是冲击点和观察点的位置改变。图4(b)的问题,冲击点和观察点位置不同。图4(c)的问题,观察点和冲击点都在板的中心,表4给出了相应的优化设计。

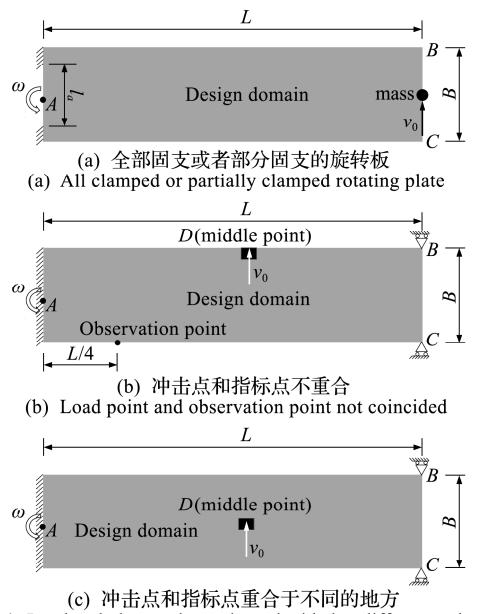


图4 转速为2000 rad/s旋转板不同工况或者边界条件

Fig. 4 Different load or boundary conditions of plate rotating at 2000 rad/s

由表4可知,当冲击点和指标点不重合时,指标设计很难得到清晰的优化结果,这样的问题本质上和柔性机构优化设计相似,后者的荷载作用点和位移控制点不一致,获得黑白结构比较困难;当冲击点与指标点重合移动到其他点时,即图4(c)的情况也很难得到清晰的优化结果,还需要进一步研究其改进方法。此外,本文还计算了长宽比为8:1的旋转板指标优化,该算例采用表1的荷载参数和材料参数,板的宽度变为0.05 m,长度仍为0.4 m,网格划分为160×20,优化结果列入表5。与长宽比为4:1不同的是,长宽比为8:1的指标设计基频和指标不是随转速增加而增加,值得进一步研究。

表3 加集中质量的板左端全部固支和部分固支的优化结果比较

Tab. 3 Comparison of optimization results between fully and partially clamped plates with lumped mass

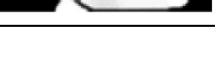
Method	Configuration
All clamped (Case(a): $la = 0$)	
Partially clamped (Case(a): $la = 2B/3$)	

表4 选取指标中不同观察点或者冲击点位置时的优化结果比较

Tab. 4 Comparison of optimization results when selecting different observing or load point

Method	Configuration
Case(b)	
Case(c)	

表5 长宽比为8:1时指标设计和基频设计的比较
Tab. 5 Comparison of optimized solutions obtained by minimizing index or maximizing fundamental frequency for rectangular plate with aspect ratio of 8:1

Method	Objective	Frequency /rad·s ⁻¹	Configuration
min Index (0 rad/s)	379.29	6223.97	
min Index (1000 rad/s)	382.41	6381.63	
min Index (2000 rad/s)	370.10	6196.04	
max Frequency	—	10357.52	

6 结论

本文研究了绕定轴旋转平板结构拓扑优化设计,采用二次型性能指标为目标函数以减小受到冲击荷载时平板结构的振动,得到了比基频最大的拓扑优化设计好很多的设计,且指标最小化设计的拓扑构型与基频最大的设计相差较大。除此,指标设计随着转速的增加,端部材料得到加强且基频增加,间接地反映了旋转带来的惯性效应,还受到边界条件、冲击荷载的位置、观察点的位置和板的长宽比等的影响得到不同的构型,其中冲击点或者指标点改变有可能很难得到清晰的优化构型,需要进一步研究。

参考文献(References):

- [1] 关玉璞,陈伟,高德平.航空发动机叶片外物损伤研究现状[J].航空学报,2007,28(4):851-857.(GUAN Yu-pu, CHEN Wei, GAO De-ping. Present status of investigation of foreign object damage to blade in aero-engine [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, 28(4):851-857. (in Chinese))
- [2] 慕琴琴,黄文超,燕群,等.旋转离心应力对叶片鸟撞响应的影响[J].航空计算技术,2014,44(6):55-58.(MU Qin-qin, HUANG Wen-chao, YAN Qun, et al. Effects of centrifugal stress on bird striking response of blades [J]. *Aeronautical Computing Technique*, 2014, 44(6):55-58. (in Chinese))
- [3] Yau D T W, Fung E H K. Optimization of a rotating flexible arm with ACLD treatment [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281(3-5):1163-1174.
- [4] Liu J, Li Q H, Liu S T, et al. Dynamic topology optimization design of rotating beam cross-section with gyroscopic effects [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(4):1467-1487.
- [5] Zhang J R, Cheng G D, Wang B P. Vibration reduction of rotating frame structure based on quadratic performance index [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 485:115442.
- [6] Rostami H, Rahbar Ranji A, Bakhtiari-Nejad F. Free in-plane vibration analysis of rotating rectangular orthotropic cantilever plates [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 115-116:438-456.
- [7] Yoo H H, Pierre C. Modal characteristic of a rotating rectangular cantilever plate [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(1):81-96.
- [8] Hashemi S H, Farhadi S, Carra S. Free vibration analysis of rotating thick plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 323(1-2):366-384.
- [9] Zhao J, Tian Q, Hu H Y. Modal analysis of a rotating thin plate via absolute nodal coordinate formulation [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2011, 6(4):041013.
- [10] 张君茹,程耿东.绝对节点坐标法下斜率不连续问题

- 处理方法讨论[J]. 动力学与控制学报, 2020, **18**(2): 21-28. (ZHANG Jun-ru, CHENG Geng-dong. Discussion on slope discontinuity using the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, **18**(2):21-28. (in Chinese))
- [11] 刘利军, 王贡献, 张志谊, 等. 绕定轴转动的主动约束层阻尼板的振动控制研究[J]. 振动与冲击, 2008, **27**(8): 138-143, 184. (LIU Li-jun, WANG Gong-xian, ZHANG Zhi-yi, et al. Vibration control of rotating plates with active constrained layer damping treatment[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, **27**(8):138-143,184. (in Chinese))
- [12] Sun J L, Tian Q, Hu H Y, et al. Topology optimization for eigenfrequencies of a rotating thin plate via moving morphable components[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, **448**:83-107.
- [13] Kang B S, Park G J, Arora J S. A review of optimization of structures subjected to transient loads [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006, **31**(2):81-95.
- [14] Zhao J P, Wang C J. Topology optimization for minimizing the maximum dynamic response in the time domain using aggregation functional method [J]. *Computers & Structures*, 2017, **190**:41-60.
- [15] Yan K, Cheng G D, Wang B P. Topology optimization of plate structures subject to initial excitations for minimum dynamic performance index[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **53**(3): 623-633.
- [16] Yan K, Cheng G D, Wang B P. Adjoint methods of sensitivity analysis for Lyapunov equation[J]. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 2016, **53**(2): 225-237.
- [17] Shabana A A. *Dynamics of Multibody Systems*[M]. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [18] 王勘成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. *Finite Element* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [19] Cook R, Saunders H. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*[M]. John Wiley & Sons, 2007.
- [20] 张亚辉, 林家浩. 结构动力学基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007. (ZHANG Ya-hui, LIN Jia-hao. *Fundamentals of Structural Dynamics*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007. (in Chinese))
- [21] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, **48**(6):1031-1055.
- [22] Held A, Nowakowski C, Moghadasi A, et al. On the influence of model reduction techniques in topology optimization of flexible multibody systems using the floating frame of reference approach[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **53**(1): 67-80.
- [23] Du J B, Olhoff N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, **34**(2):91-110.

Topology optimization of vibration reduction of in-plane rotating plate around a fixed hub based on quadratic performance index

ZHANG Jun-ru, CHENG Geng-dong*

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: This paper studies topology optimization of a rotating plate around a fixed axis under given material volume to reduce vibration under impact load. A quadratic performance index in integral form is used as the objective function and the artificial densities of finite elements are used as design variables. Considering that the plate structure rotates at a constant speed in the plane and the assumption of small strain, the differential equations of motion are established by using multi-body dynamics theory and the finite element method. Lyapunov's second method is applied to simplify the objective. Adjoint variable method for sensitivity analysis and mode superposition method are used to improve efficiency. Numerical results show the proposed topology optimization method can reduce the vibration of the rotating plate and the topology configuration is different from that of maximum frequency. Material distribution and the fundamental frequency of the topological configuration change with the increase of the rotational speed. Boundary conditions, location of impact or observation point and plate size have influences on the optimal solution.

Key words: residual vibration reduction; rotating plate; quadratic index; topology optimization; lyapunov second method

引用本文/Cite this paper:

张君茹,程耿东. 基于二次型性能指标定轴转动板减振拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(2):135-141.

ZHANG Jun-ru, CHENG Geng-dong. Topology optimization of vibration reduction of in-plane rotating plate around a fixed hub based on quadratic performance index[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(2):135-141.