第38卷第6期 计 算 力 学 学 报 Vol. 38, No. 6
2021年12月 Chinese Journal of Computational Mechanics December 2021

DOI:10.7511/jslx20200810001

一种新型的高分辨率通量差分裂格式

胡立军*[1], 赵昆磊[2], 袁海专[3]

(1.衡阳师范学院 数学与统计学院,衡阳 421002;
2.中国科学院数学与系统科学研究院 计算数学与科学工程计算研究所,北京 100190;
3.湘潭大学 数学与计算科学学院,湘潭 411105)

摘 要:传统的Roe格式不满足熵条件并且在计算激波问题时会遭遇不同形式的不稳定现象,如慢行激波的波后振荡和红玉(carbuncle)现象。基于Zha-Bilgen对流-压力通量分裂方法,构造一种新型的通量差分裂格式。利用约旦标准型理论,通过添加广义特征向量构造通量差分裂方法来计算对流子系统。压力子系统具有一组完备的线性无关特征向量,因此可以构造传统的通量差分裂格式进行计算。为了提高接触间断的分辨率,利用界面变差下降(BVD)算法来重构对流通量耗散项中的密度差。激波稳定性分析表明,新格式可以有效地衰减数值误差,从而抑制不稳定现象的发生。一系列数值实验证明了本文构造的新型通量差分裂格式比Roe格式具有更高的分辨率和更好的鲁棒性。

关键词:可压缩流;通量差分裂格式;Zha-Bilgen分裂方法;界面变差下降算法;高分辨率;鲁棒性

中图分类号:O354;O241.82 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2021)06-0810-09

1 引 言

数值模拟高马赫数流动问题需要精确鲁棒的数值格式。无论在理论研究还是在工程应用中,迎风格式都是最受欢迎的激波捕捉方法。根据反映控制方程组物理特性的不同方式,通常可将其分为通量差分裂(FDS)格式和通量向量分裂(FVS)格式。流行的通量差分裂格式主要包括Roe格式[1]、Osher格式[2]和HLL-类格式[3-5]。其中,利用系统的特征值和特征向量构造的Roe格式计算代价小并且能够精确捕捉各类间断。但是,由于Roe格式不满足熵条件,故在计算中会产生非物理的膨胀激波。在计算强激波问题时,低耗散的Roe,Osher,HLLEM和HLLC格式还会遭遇红玉(carbuncle)现象的困扰,这极大地影响了对于高超声速流动问题的精确模拟。消除低耗散通量差分裂格式激波异常现象的一些工作主要包括,与耗散格式进行混合[6-8]、对Roe格式进行熵修正[9]、构造旋转格式[10]、反扩散控制方法[11]、多维耗散方法[12]、添加人工粘性[13]以及增加剪切粘性[14]等。这些方法通过局部增加格式的数值耗散成功地抑制了激波不稳定现象,但是在计算复杂流动问题时,不合适的数值耗散可能会影响接触面和剪切层的精度。

以Steger-Warming格式[15]和van Leer格式[16]为代表的通量向量分裂方法在计算中具有很好的鲁棒性,但是其主要的缺点是不能精确分辨接触间断和剪切波。此外,基于对流-压力通量分裂方法构造的混合迎风格式也吸引了许多研究人员的关注。Liou等[17]将动量方程中的压力项分裂出来,并且构造了一种可以精确分辨接触间断的对流迎风分裂方法(AUSM)。目前,AUSM格式已经发展成为具有广泛应用前景的AUSM-类格式[18-20]。Zha等[21]将动量方程中的压力项以及能量方程中速度与压力的乘积项分裂出来进而构造了一种混合迎风格式。此外,Toro等[22]提出了一种新的对流-压力通量分裂方法,其特点是对流通量中完全不含压力项。基于对流-压力通量分裂方法构造的混合迎风格式形式简单并且能够精确捕捉接触间断,但是在计算某些问题时仍然会出现红玉现象和激波波后振荡[23]。

本文基于Zha-Bilgen对流-压力通量分裂方法来构造一种精确鲁棒的新型通量差分裂格式。压力子系统具有一组完备的线性无关的特征向量,因此可以构造传统的通量差分裂格式来进行计算。弱双曲的对流子系统采用文献[24]添加广义特征向量的方法构造通量差分裂格式来进行计算。为

收稿日期:2020-08-10;**修改稿收到日期**:2020-12-23.
基金项目:国家自然科学基金(11871414);湖南省自然科学基金(2021JJ40009)资助项目.
作者简介:胡立军*(1985-),男,博士,讲师(E-mail:hulijun@lsec.cc.ac.cn).

了提高接触间断的分辨率，利用界面变差下降(BVD)算法[25]来减小对流通量耗散项的密度差。稳定性分析和数值实验证明了新的通量差分裂格式比 Roe 格式具有更好的鲁棒性和更高的分辨率。

2　预备知识

二维无粘可压缩流的控制方程组可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y}=\mathbf{0} \tag{1}$$

式中

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},\mathbf{F}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho u v\\ u(E+p)\end{bmatrix},\mathbf{G}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho u v\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix} \tag{2}$$

ρ 为密度，u 和 v 表示流体在 x-方向和 y-方向的速度，p 为压力，E 为总能。状态方程为

$$p=(\gamma-1)\left[E-\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)\right] \tag{3}$$

除非特别说明，否则比热比 γ 取 1.4。将计算区域划分成结构化的四边形网格并且采用有限体积方法对式(1)进行空间离散，

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{U}}_{i,j}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{|\Omega_{i,j}|}\sum_{k=1}^{4}[(\mathbf{F},\mathbf{G})_k\cdot\boldsymbol{n}_k]\Delta l_k \tag{4}$$

式中 $\overline{\mathbf{U}}_{i,j}$ 为守恒向量 $\mathbf{U}$ 的单元平均值，$|\Omega_{i,j}|$ 为网格单元 $\Omega_{i,j}$ 的面积。$\boldsymbol{n}_k$ 和 Δl_k 表示第 k 条边的单位外法向量和长度，$(\mathbf{F},\mathbf{G})_k\cdot\boldsymbol{n}_k$ 为其中点处的数值通量，利用旋转不变性可将其改写为

$$(\mathbf{F},\mathbf{G})_k\cdot\boldsymbol{n}_k=\mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}_k\mathbf{U}_L,\mathbf{T}_k\mathbf{U}_R) \tag{5}$$

式中 $\mathbf{T}_k$ 和 $\mathbf{T}_k^{-1}$ 为旋转矩阵。

Roe 格式[1]数值通量的表达式为

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{\mathrm{Roe}}=\frac{1}{2}(\mathbf{F}_L+\mathbf{F}_R)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\tilde{\alpha}_m|\tilde{\lambda}_m|\tilde{\mathbf{R}}_m \tag{6}$$

式中 $\tilde{\alpha}_1=\dfrac{\Delta p-\tilde{\rho}\tilde{a}\Delta u}{2\tilde{a}^2}$，$\tilde{\alpha}_2=\Delta\rho-\dfrac{\Delta p}{\tilde{a}^2}$

$$\tilde{\alpha}_3=\tilde{\rho}\Delta v,\ \tilde{\alpha}_4=\frac{\Delta p+\tilde{\rho}\tilde{a}\Delta u}{2\tilde{a}^2} \tag{7}$$

$$\tilde{\lambda}_1=\tilde{u}-\tilde{a},\ \tilde{\lambda}_2=\tilde{\lambda}_3=\tilde{u},\ \tilde{\lambda}_4=\tilde{u}+\tilde{a} \tag{8}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_1=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}-\tilde{a}\\ \tilde{v}\\ \tilde{H}-\tilde{u}\tilde{a}\end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{R}}_2=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}\\ \tilde{v}\\ (\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)/2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ \tilde{v}\end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{R}}_4=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}+\tilde{a}\\ \tilde{v}\\ \tilde{H}+\tilde{u}\tilde{a}\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中 $a=\sqrt{\gamma p/\rho}$ 表示声速，$H=(E+p)/\rho$ 表示总焓，$\tilde{q}$ 表示物理量 q 的 Roe 平均值，$\Delta(\cdot)=(\cdot)_R-(\cdot)_L$。

Roe 格式能够精确捕捉各类间断，但是不满足熵条件，在计算中会产生非物理的膨胀激波。在计算强激波问题时还会遭遇红玉现象。

3　一种新型的通量差分裂格式

基于 Zha-Bilgen 分裂方法来构造一种精确和鲁棒的通量差分裂格式。

3.1　Zha-Bilgen 分裂

Zha 等[21]将欧拉方程的通量分裂成对流通量和压力通量两部分。

$$\mathbf{F}(\mathbf{U})=\mathbf{F}^c+\mathbf{F}^p=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2\\ \rho u v\\ uE\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ p\\ 0\\ up\end{bmatrix} \tag{10}$$

对流通量 $\mathbf{F}^c$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{A}^c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -u^2 & 2u & 0 & 0\\ -uv & v & u & 0\\ -uE/\rho & E/\rho & 0 & u\end{bmatrix} \tag{11}$$

$\mathbf{A}^c$ 的特征值为

$$\lambda_1^c=\lambda_2^c=\lambda_3^c=\lambda_4^c=u \tag{12}$$

其线性无关的特征向量为

$$\mathbf{R}_1^c=\begin{bmatrix}1\\ u\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{R}_2^c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ u\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{R}_3^c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{13}$$

压力通量 $\mathbf{F}^p$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{A}^p=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2+v^2) & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{u^3+uv^2}{2}(\gamma-1)-\frac{ua^2}{\gamma} & \frac{a^2}{\gamma}-(\gamma-1)u^2 & (1-\gamma)uv & (\gamma-1)u\end{bmatrix} \tag{14}$$

$\mathbf{A}^p$ 的特征值为

$$\lambda_1^p=-\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}a,\ \lambda_2^p=\lambda_3^p=0,\ \lambda_4^p=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}a \tag{15}$$

其线性无关的特征向量为

$$\mathbf{R}_1^p=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ u-a/\sqrt{\gamma(\gamma-1)}\end{bmatrix},\ \mathbf{R}_2^p=\begin{bmatrix}v\\ uv\\ (v^2-u^2)/2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3^p=\begin{bmatrix}1\\ u\\ 0\\ (u^2-v^2)/2\end{bmatrix},\ \mathbf{R}_4^p=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ u+a/\sqrt{\gamma(\gamma-1)}\end{bmatrix} \tag{16}$$

从式(12,15)可以看出,对流子系统的四个特征值都等于流体在该方向的速度,从而表现出很好的对流特性。而压力子系统的特征值等于声速的常数倍,很好地反映了声速波的特性。

3.2 FDS-ZB-BVD 格式

3.2.1 压力数值通量

从式(16)可以看出,压力子系统有一组完备的线性无关的特征向量,因此可以构造传统的通量差分裂格式来计算压力数值通量,

$$\mathbf{F}^{p}_{i+1/2,j}=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{p}_{L}+\mathbf{F}^{p}_{R})-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\tilde{\alpha}^{p}_{m}|\tilde{\lambda}^{p}_{m}|\tilde{\mathbf{R}}^{p}_{m} \quad (17)$$

式中 波强 $\tilde{\alpha}^{p}_{m}$ 的表达式为

$$\tilde{\alpha}^{p}_{1}=\frac{\tilde{\rho}\Delta u}{2}-\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{\Delta p}{2\tilde{a}}\right)$$

$$\tilde{\alpha}^{p}_{2}=2\cdot\frac{\tilde{v}\Delta\rho+\tilde{\rho}\Delta v}{\tilde{v}^{2}-\tilde{u}^{2}}$$

$$\tilde{\alpha}^{p}_{3}=\Delta\rho-2\cdot\frac{\tilde{v}^{2}\Delta\rho+\tilde{\rho}\tilde{v}\Delta v}{\tilde{v}^{2}-\tilde{u}^{2}}$$

$$\tilde{\alpha}^{p}_{4}=\frac{\tilde{\rho}\Delta u}{2}+\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{\Delta p}{2\tilde{a}}\right) \quad (18)$$

$\tilde{\lambda}^{p}_{m}$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}^{p}_{m}(m=1,2,3,4)$ 表示压力子系统的特征值和特征向量,其定义见式(15,16)。各个物理量平均值的定义为

$$\tilde{\rho}=\sqrt{\rho_{L}\rho_{R}},\ \tilde{u}=(\sqrt{\rho_{L}}u_{L}+\sqrt{\rho_{R}}u_{R})/(\sqrt{\rho_{L}}+\sqrt{\rho_{R}})$$

$$\tilde{v}=\frac{\sqrt{\rho_{L}}v_{L}+\sqrt{\rho_{R}}v_{R}}{\sqrt{\rho_{L}}+\sqrt{\rho_{R}}},\ \tilde{a}^{2}=\frac{\sqrt{\rho_{L}}a_{L}^{2}+\sqrt{\rho_{R}}a_{R}^{2}}{\sqrt{\rho_{L}}+\sqrt{\rho_{R}}} \quad (19)$$

3.2.2 对流数值通量

对流子系统满足微分关系式,

$$\mathrm{d}\mathbf{F}^{c}=\tilde{\mathbf{A}}^{c}\mathrm{d}\mathbf{U} \quad (20)$$

将式(20)改写成有限差分形式,

$$\Delta\mathbf{F}^{c}=\tilde{\mathbf{A}}^{c}\Delta\mathbf{U} \quad (21)$$

式中 $\Delta\mathbf{F}^{c}=\mathbf{F}^{c}_{R}-\mathbf{F}^{c}_{L}$, $\Delta\mathbf{U}=\mathbf{U}_{R}-\mathbf{U}_{L}$。

从式(13)可知,对流子系统没有一组完备的线性无关的特征向量,因此无法直接将 $\Delta\mathbf{U}$ 分解成对流子系统特征向量组的线性组合。采用文献[24]的约旦标准型理论来添加广义特征向量,并且注意到对流子系统有四个相等的特征值 u,可以得到:

$$\Delta\mathbf{F}^{c}=|\tilde{\lambda}^{c}|\Delta\mathbf{U} \quad (22)$$

因此,对流子系统的数值通量可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{c}_{i+1/2,j}&=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{c}_{L}+\mathbf{F}^{c}_{R}-\Delta\mathbf{F}^{c})=\\&\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{c}_{L}+\mathbf{F}^{c}_{R})-\frac{1}{2}|\tilde{\lambda}^{c}|(\mathbf{U}_{R}-\mathbf{U}_{L})=\\&\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{c}_{L}+\mathbf{F}^{c}_{R})-\frac{1}{2}|\tilde{\lambda}^{c}|\begin{bmatrix}\rho_{R}-\rho_{L}\\(\rho u)_{R}-(\rho u)_{L}\\(\rho v)_{R}-(\rho v)_{L}\\E_{R}-E_{L}\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (23)$$

为了减少数值耗散,利用 THINC 函数来重构界面两侧的密度[25],

$$\rho_{i}(x_{i+1/2})=\rho_{\min}+\frac{\Delta\rho}{2}\left(1+\theta\frac{\tanh(\beta)+\mathrm{A}}{1+\mathrm{A}\tanh(\beta)}\right)$$

$$\rho_{i}(x_{i-1/2})=\rho_{\min}+\frac{\Delta\rho}{2}(1+\theta\mathrm{A}) \quad (24)$$

式中 $\rho_{\min}=\min(\rho_{i-1},\rho_{i+1})$, $\Delta\rho=|\rho_{i+1}-\rho_{i-1}|$

$$\mathrm{A}=[\mathrm{B}-\cosh(\beta)]/\sinh(\beta)$$

$$\mathrm{B}=\exp\left[\theta\beta\left(2\frac{\rho_{i}-\rho_{\min}+\varepsilon}{\Delta\rho+\varepsilon}-1\right)\right]$$

$$\theta=\mathrm{sgn}(\rho_{i+1}-\rho_{i-1}),\ \varepsilon=10^{-20} \quad (25)$$

数值实验表明,耗散控制参数 β 取 1.1~2.0,都可以得到理想的结果,β 越大耗散越小。后面的数值实验 β 均取 1.5。

本文将式(24)重构得到的界面两侧的密度记为 $\rho^{\mathrm{T}}_{L/R}$。另一方面,将多项式重构得到的界面两侧的密度记为 $\rho^{\mathrm{P}}_{L/R}$,本文采用二阶 MUSCL 格式来作为多项式重构。为了提高接触间断的分辨率,采用界面变差下降(BVD)算法[25]来选择对流通量耗散项中界面两侧的密度,

$$\begin{aligned}|\rho_{R}-\rho_{L}|=\min(&|\rho^{\mathrm{T}}_{R}-\rho^{\mathrm{T}}_{L}|,|\rho^{\mathrm{P}}_{R}-\rho^{\mathrm{P}}_{L}|,\\&|\rho^{\mathrm{T}}_{R}-\rho^{\mathrm{P}}_{L}|,|\rho^{\mathrm{P}}_{R}-\rho^{\mathrm{T}}_{L}|)\end{aligned} \quad (26)$$

因此,基于 Zha-Bilgen 分裂方法并且结合 BVD 算法构造的通量差分裂格式(命名为 FDS-ZB-BVD)数值通量的表达式为

$$\mathbf{F}^{\mathrm{FDS\text{-}ZB\text{-}BVD}}_{i+1/2,j}=\mathbf{F}^{c}_{i+1/2,j}+\mathbf{F}^{p}_{i+1/2,j} \quad (27)$$

本文将通过稳定性分析和数值实验来证明该格式比 Roe 格式具有更好的鲁棒性和更高的分辨率。

3.3 稳定性分析

低耗散的数值格式在计算强激波问题时会遭遇激波不稳定现象。采用矩阵稳定性分析方法[26]对 Roe 格式和 FDS-ZB-BVD 格式进行稳定性分析。

将计算区域[0,1]×[0,1]划分成 20×20 的笛卡尔网格,马赫数 $M_{0}=7$ 的稳态驻激波位于第 10 列和第 11 列网格单元共有的网格界面上。激波的上游状态为

$$\mathbf{U}_{(0)}=\left(1,1,0,\frac{1}{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}_{0}^{2}}+\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}} \quad (28)$$

下游状态通过 Rankine-Hugoniot 关系式来得到

$$\mathbf{U}_{(1)}=\left(f(\mathrm{M}_{0}),1,0,\frac{g(\mathrm{M}_{0})}{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}_{0}^{2}}+\frac{1}{2f(\mathrm{M}_{0})}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$f(\mathrm{M}_{0})=\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{\mathrm{M}_{0}^{2}}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-1}$$

$$g(\mathrm{M}_{0})=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\mathrm{M}_{0}^{2}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (29)$$

本文研究不同格式的数值误差随着时间的发展趋势。整个区域的流场可以分解为

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_m^0 + \delta \mathbf{U}_m \tag{30}$$

式中 $\mathbf{U}_m^0$ 为稳态均值，$\delta \mathbf{U}_m$ 为数值误差，下标 m 为网格单元的全局指标。在两个相邻的网格单元 m 和 k 共有界面处，通量函数可以线性化为

$$\mathbf{\Phi}_{mk}(\mathbf{U}_m, \mathbf{U}_k) = \mathbf{\Phi}_{mk}(\mathbf{U}_m^0, \mathbf{U}_k^0) + \frac{\partial \mathbf{\Phi}_{mk}}{\partial \mathbf{U}_m}\delta \mathbf{U}_m + \frac{\partial \mathbf{\Phi}_{mk}}{\partial \mathbf{U}_k}\delta \mathbf{U}_k \tag{31}$$

将线性化的通量函数代入式(4)，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}(\delta \mathbf{U}_m)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{|\Omega_m|}\sum_{\Gamma_{mk}\subset\partial\Omega_m}|\Gamma_{mk}|\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}_{mk}}{\partial \mathbf{U}_m}\delta \mathbf{U}_m + \frac{\partial \mathbf{\Phi}_{mk}}{\partial \mathbf{U}_k}\delta \mathbf{U}_k\right] \tag{32}$$

将式(32)改写成矩阵形式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\delta \mathbf{U}_1\\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q\end{bmatrix} = \mathbf{S}\begin{bmatrix}\delta \mathbf{U}_1\\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q\end{bmatrix} \tag{33}$$

式中 $q = 20 \times 20$ 为网格单元总数，$\mathbf{S}$ 为稳定性矩阵。求解式(33)，得到数值误差的演化方程为

$$\begin{bmatrix}\delta \mathbf{U}_1\\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q\end{bmatrix}(t) = e^{\mathbf{S}t}\begin{bmatrix}\delta \mathbf{U}_1\\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q\end{bmatrix}_{t=0} \tag{34}$$

误差发展有界的条件为

$$\max\{\mathrm{Re}[\lambda(\mathbf{S})]\} \leqslant 0 \tag{35}$$

式中 $\mathrm{Re}[\lambda(\mathbf{S})]$ 表示稳定性矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征值的实部。

图 1 展示了稳定性矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征值在复平面上的分布。可以看出，本文构造的 FDS-ZB-BVD 格式是稳定的，而 Roe 格式是不稳定的。在计算强激波问题时，FDS-ZB-BVD 格式会比 Roe 格式表现出更好的鲁棒性。第 4 节的数值实验也证明了这一点。

4　数值结果和分析

通过数值实验来检验 FDS-ZB-BVD 格式的精度和鲁棒性。采用二阶 MUSCL 格式获得空间的二阶精度，时间离散采用二阶 Runge-Kutta 格式。

4.1　一维算例

计算几个经典的算例来比较 FDS-ZB-BVD 格式和 Roe 格式捕捉间断的能力。

4.1.1　孤立的接触间断

计算马赫数 $M_0 = 0.1$ 的孤立接触间断。将计算区域[0,1]均匀划分成 100 个网格，初始条件为

$$(\rho_0, u_0, p_0) = \begin{cases}(1.4,\ 0.1,\ 1.0) & (x < 0.5)\\ (1.0,\ 0.1,\ 1.0) & (x \geqslant 0.5)\end{cases} \tag{36}$$

图 2 展示了 $t = 2.0$ 时的密度分布。可以看出，FDS-ZB-BVD 格式可以更加精确地捕捉该接触间断。

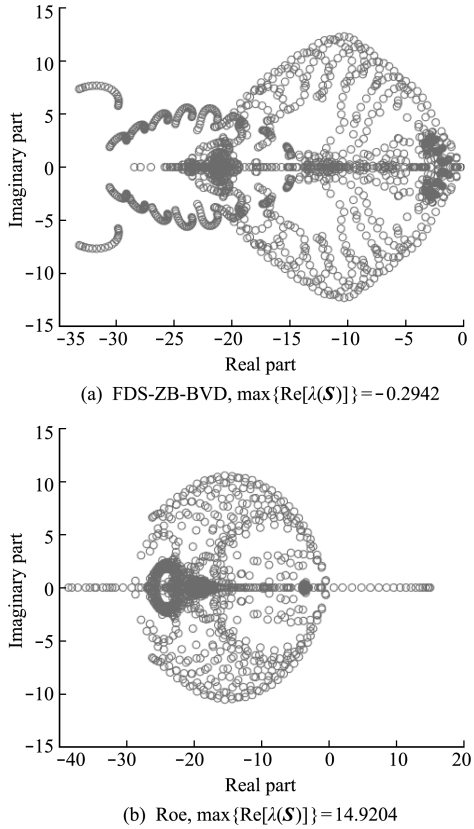

图 1　稳定性矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征值在复平面上的分布

Fig. 1　Distribution of eigenvalues of stability matrix $\mathbf{S}$ in the complex plane

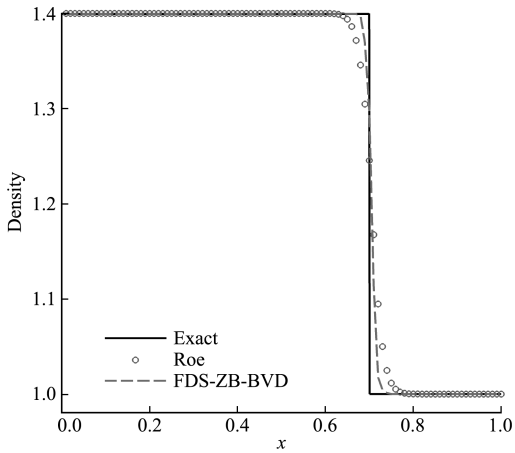

图 2　孤立的接触间断的密度分布

Fig. 2　Density distribution of the isolated contact discontinuity

4.1.2　Lax 问题

将计算区域[0,1]均匀划分成 100 个网格，初始条件为

$$(\rho_0, u_0, p_0) = \begin{cases}(0.445, 0.698, 3.528) & (x < 0.5)\\ (0.5, 0, 0.571) & (x \geqslant 0.5)\end{cases} \tag{37}$$

该算例由一个左行的稀疏波、一个右行的接触间断和强激波构成。图 3 展示了 $t = 0.15$ 时的密度分布。可以看出，FDS-ZB-BVD 格式在接触间

断处比 Roe 格式的耗散更小，捕捉激波和稀疏波时与 Roe 格式具有相同的分辨率。

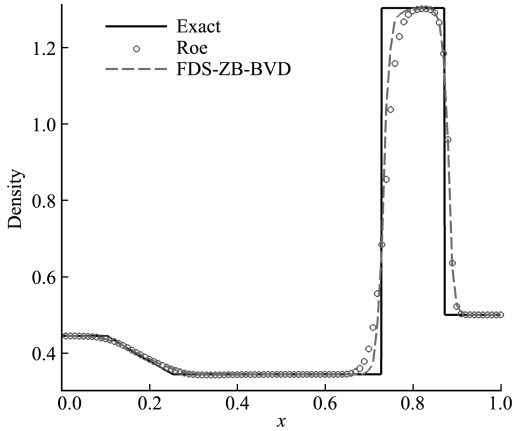

图 3 Lax 问题的密度分布

Fig. 3 Density distribution of the Lax problem

4.1.3 慢行激波问题

将计算区域[0,1]均匀划分成 500 个网格，初始条件为

$$(\rho_0, u_0, p_0)=\begin{cases}(3.86,-0.81,10.33) & (x<0.5)\\(1.0,-3.44,1.0) & (x\geqslant 0.5)\end{cases} \tag{38}$$

该算例由一个孤立的右行慢激波构成。图 4 展示了 $t=1.5$ 时的密度分布。可以看出，Roe 格式在波后出现了明显的振荡，而 FDS-ZB-BVD 格式有效地抑制了波后的振荡，表现出了更好的鲁棒性。

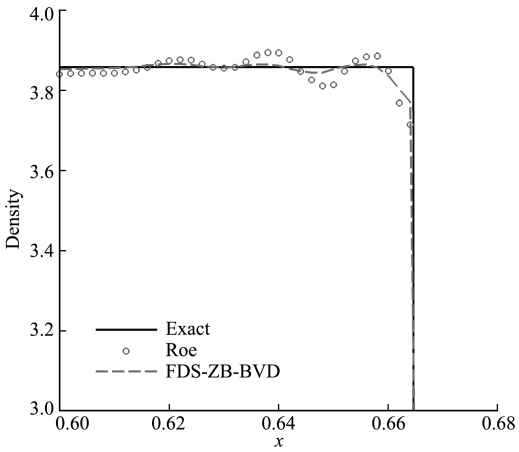

图 4 慢行激波问题的密度分布

Fig. 4 Density distribution of the slowly moving shock problem

4.1.4 一维爆轰波问题

将计算区域[0,1]均匀划分成 500 个网格，初始条件为

$$(\rho_0, u_0, p_0)=\begin{cases}(1.0,0.0,1000) & (x<0.1)\\(1.0,0.0,0.01) & (0.1\leqslant x<0.9)\\(1.0,0.0,100) & (x\geqslant 0.9)\end{cases} \tag{39}$$

该算例包含了复杂的间断结构和波系间的相互作用。图 5 展示了 $t=0.38$ 时的密度分布。可以看出，FDS-ZB-BVD 格式对于各个波系具有更高的分辨率。

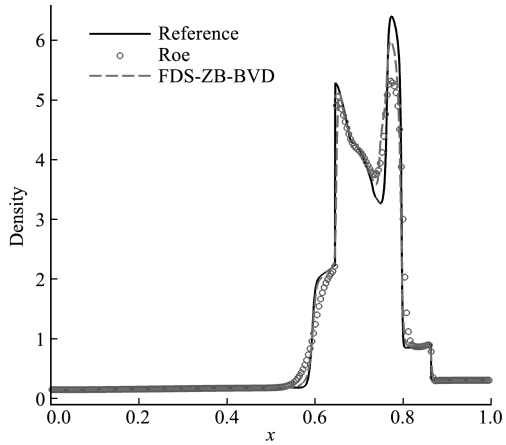

图 5 一维爆轰波问题的密度分布

Fig. 5 Density distribution of the 1D blast wave problem

4.1.5 激波-熵波相互作用问题

将计算区域[−5,5]均匀划分成 1000 个网格，初始条件为

$$(\rho_0, u_0, p_0)=\begin{cases}(27/7,4\sqrt{35}/9,31/3) & (x<-4)\\(1+0.2\sin(5x),0,1) & (x\geqslant -4)\end{cases} \tag{40}$$

该算例涉及到马赫数为 3 的激波和密度扰动产生的余弦波相互作用，产生了包含光滑和间断结构的流场。图 6 展示了 $t=1.8$ 时的密度分布。可以看出，FDS-ZB-BVD 格式比 Roe 格式具有更高的分辨率。

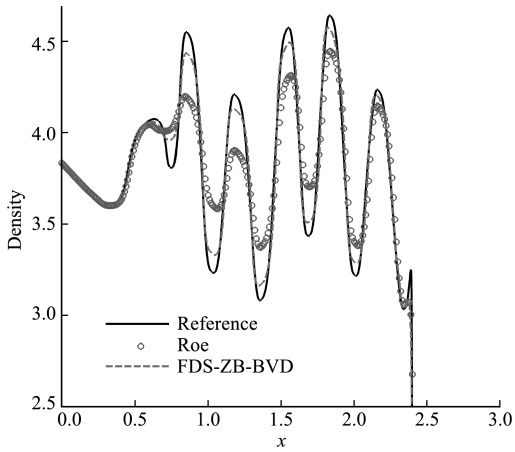

图 6 激波-熵波相互作用问题的密度分布

Fig. 6 Density distribution of the shock-entropy wave interaction problem

4.2 二维算例

通过算例检验 FDS-ZB-BVD 格式在计算二维问题时的精度和鲁棒性。本文仅考虑用结构化四边形网格来划分规则的矩形区域，对于不规则的计

算区域，可以使用非结构网格（如三角形网格）进行区域的划分，然后利用本文构造的数值格式结合旋转不变性式(5)计算界面的数值通量，最后应用有限体积方法来离散控制方程组。

4.2.1　二维黎曼问题

将计算区域[0,1]×[0,1]划分成512×512的正方形网格，初始条件为

$$(\rho_0,u_0,v_0,p_0)=\begin{cases}(1,-0.75,-0.5,1) & (x\geqslant 0.5,y\geqslant 0.5)\\(2,-0.75,0.5,1) & (x\geqslant 0.5,y\geqslant 0.5)\\(1,0.75,0.5,1) & (x\geqslant 0.5,y\geqslant 0.5)\\(3,0.75,-0.5,1) & (x\geqslant 0.5,y\geqslant 0.5)\end{cases}\tag{41}$$

图7展示了 $t=0.23$ 时的密度等值线。可以看出，FDS-ZB-BVD格式比Roe格式具有更高的分辨率。该算例表明，本文构造的新型通量差分裂格式在计算二维问题时，可以有效地改善接触间断和相关流场结构的分辨率。

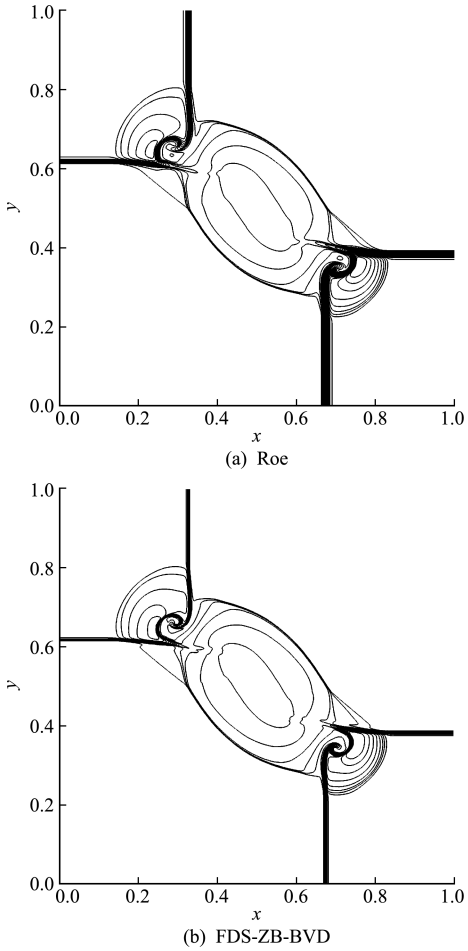

图7　二维黎曼问题的密度等值线

Fig. 7　Density contours of the 2D Riemann problem

4.2.2　移动接触面问题

将计算区域[0,1]×[0,1]划分成200×200的正方形网格，初始条件为

$$(\rho_0,u_0,v_0,p_0)=\begin{cases}(2,1,1,1)\\((x-0.5)^2+(y-0.5)^2\leqslant 0.09)\\(1,1,1,1)\\((x-0.5)^2+(y-0.5)^2>0.09)\end{cases}\tag{42}$$

该算例涉及到以(0.5,0.5)为圆心，0.3为半径的圆环接触面以速度 $(u,v)=(1,1)$ 匀速运动。图8展示了 $t=0.15$ 时的密度等值线，此时圆心的位置为(0.65,0.65)。可以看出，FDS-ZB-BVD格式大大改善了接触面的分辨率。

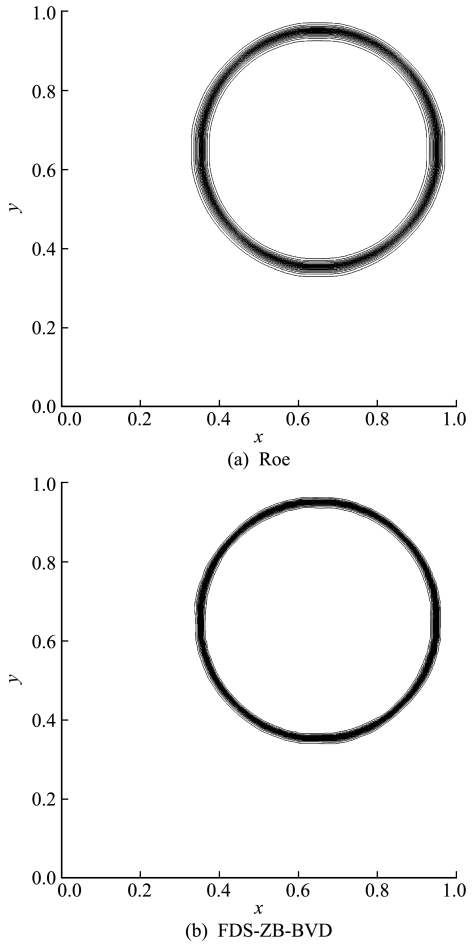

图8　移动接触面问题的密度等值线

Fig. 8　Density contours of the moving contact surface problem

4.2.3　Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

将计算区域[0,0.25]×[0,1]划分成120×480的正方形网格。区域上下部分两种流体的初始条件为

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases}(2,0,-0.025a\cos(8\pi x),1+2y) & (0\leqslant y\leqslant 0.5)\\(1,0,-0.025a\cos(8\pi x),1.5+y) & (0.5<y\leqslant 1)\end{cases}\tag{43}$$

式中 $a=\sqrt{\gamma p/\rho}$ 为声速，比热比 γ 取 5/3。为了引入重力效应，在方程右端添加源项 $\mathbf{S}=(0,0,\rho,\rho v)^{\mathrm{T}}$。在 y-方向速度扰动的作用下，高密度流体进入到低密度流体从而发展成 Rayleigh-Taylor 不稳定性。图 9 展示了 $t=1.95$ 时的密度等值线。可以看出，FDS-ZB-BVD 格式能够更加精确地捕捉接触面和由 Rayleigh-Taylor 不稳定性形成的小尺度流场。

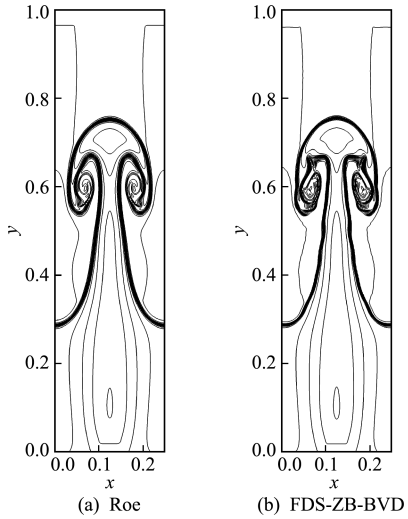

图 9 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的密度等值线

Fig. 9 Density contours of the Rayleigh-Taylor instability problem

4.2.4 奇偶失联问题

能够精确捕捉接触间断的低耗散数值格式（如 Roe 和 HLLC）在计算强激波问题时会遭遇红玉现象[11-14]。计算经典的奇偶失联问题来检验 FDS-ZB-BVD 格式的鲁棒性。初始时位于 $x=5$ 处马赫数为 10 的平面激波沿 x-方向传播。将计算区域 $[0,1500]\times[0,20]$ 划分成 1500×20 的均匀笛卡尔网格，除了 y-方向的网格中心线处存在如下奇偶对称扰动，

$$y_{i,j'_{\mathrm{mid}}}=y_{i,j_{\mathrm{mid}}}+(-1)^{i}\cdot10^{-6} \tag{44}$$

激波右侧流体的密度为 1.4，压力为 1，两个方向的速度均为 0。图 10 展示了 $t=120$ 时的密度等值线。可以看出，Roe 格式出现了明显的红玉现象，激波面完全破坏，而 FDS-ZB-BVD 格式有效地抑制了激波异常现象，得到了清晰和准确的激波面，表现出了更好的鲁棒性。

4.2.5 二维 Sedov 爆轰波问题

该问题涉及大压力比和强激波，常用来检验低耗散数值格式的鲁棒性。将计算区域 $[0,2.4]\times[0,2.4]$ 划分成 480×480 的正方形网格。初始时，区域中心高压区的压力为 3.5×10^{5}，其余地方的压力为 10^{-10}，整个区域流体的密度为 1，两个方向的速度均为 0。图 11 展示了 $t=0.1$ 时的压力等值线。可以看出，FDS-ZB-BVD 格式消除了 Roe 格式非物理的红玉现象，表现出了更好的鲁棒性。

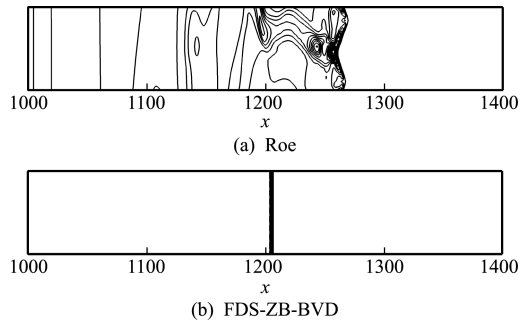

图 10 奇偶失联问题的密度等值线

Fig. 10 Density contours of the odd-even decoupling problem

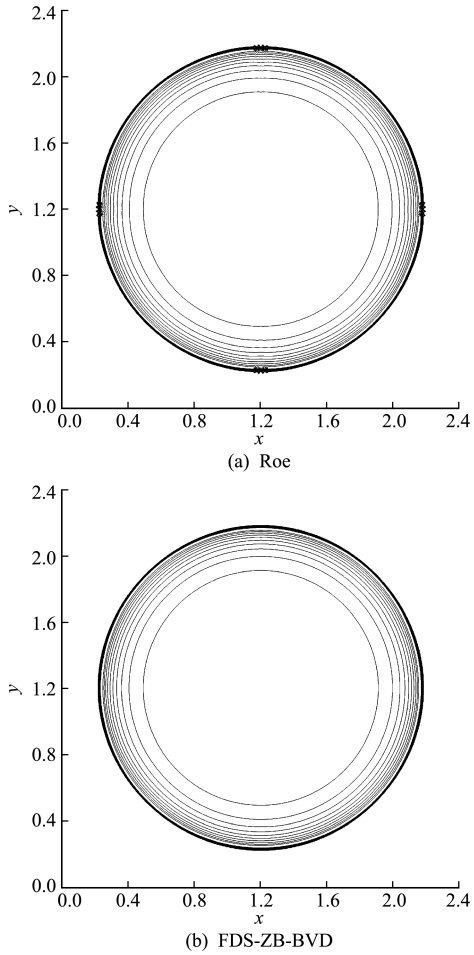

图 11 二维 Sedov 爆轰波问题的压力等值线

Fig. 11 Pressure contours of the 2D Sedov blast wave problem

5 结 论

基于 Zha-Bilgen 对流-压力通量分裂方法构造了一种新型的通量差分裂格式。由于压力子系统具有一组完备的线性无关的特征向量，因此构造传

统的通量差分裂格式来进行计算。对于弱双曲的对流子系统，通过添加广义特征向量构造通量差分裂格式进行求解。为了提高接触间断的分辨率，利用界面变差下降(BVD)算法来减少对流通量耗散项中的密度差。激波稳定性分析表明新格式可以有效抑制数值误差的增长。一系列数值实验证明了本文构造的新型通量差分裂格式比传统的 Roe 格式具有更高的分辨率和更好的鲁棒性。因此，本文方法是一种精确和鲁棒的数值方法，可以广泛应用于可压缩流的数值模拟。

参考文献(References)：

[1] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**(2): 357-372.

[2] Osher S, Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws[J]. *Mathematics of Computation*, 1982, **38**(158): 339-374.

[3] Harten A, Lax P D, van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Review*, 1983, **25**(1): 35-61.

[4] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. *Shock Waves*, 1994, **4**(1): 25-34.

[5] Einfeldt B, Munz C D, Roe P L, et al. On Godunov-type methods near low densities[J]. *Journal of Computational Physics*, 1991, **92**(2): 273-295.

[6] Kim S D, Lee B J, Lee H J, et al. Robust HLLC Riemann solver with weighted average flux scheme for strong shock[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(20): 7634-7642.

[7] Shen Z J, Yan W, Yuan G W. A stability analysis of hybrid schemes to cure shock instability[J]. *Communications in Computational Physics*, 2014, **15**(5): 1320-1342.

[8] 胡立军，袁　礼，翟　健. 一种健壮的混合 Roe 黎曼求解器[J]. 计算力学学报，2019，**36**(6)：818-824. (HU Li-jun, YUAN Li, ZHAI Jian. A robust hybrid Roe Riemann solver[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(6): 818-824. (in Chinese))

[9] Dechaumphai P, Phongthanapanich S. High-speed compressible flow solutions by adaptive cell-centered upwinding algorithm with modified H-correction entropy fix[J]. *Advances in Engineering Software*, 2003, **34**(9): 533-538.

[10] Nishikawa H, Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers [J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, **227**(4): 2560-2581.

[11] Simon S, Mandal J C. A cure for numerical shock instability in HLLC Riemann solver using antidiffusion control[J]. *Computers & Fluids*, 2018, **174**: 144-166.

[12] Chen Z Q, Huang X D, Ren Y X, et al. General procedure for Riemann solver to eliminate carbuncle and shock instability[J]. *AIAA Journal*, 2017, **55**(6): 2002-2015.

[13] Rodionov A V. Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, **345**: 308-329.

[14] Chen S S, Yan C, Lin B X, et al. Affordable shock-stable item for Godunov-type schemes against carbuncle phe-nomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **373**: 662-672.

[15] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **40**(2): 263-293.

[16] van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1979, **32**(1): 101-136.

[17] Liou M S, Steffen Jr C J. A new flux splitting scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **107**(1): 23-39.

[18] Pandare A K, Luo H, Bakosi J. An enhanced AUSM$^+$-up scheme for high-speed compressible two-phase flows on hybrid grids[J]. *Shock Waves*, 2019, **29**: 629-649.

[19] Qu F, Sun D, Yan C. A new flux splitting scheme for the Euler equations II: E-AUSMPWAS for all speeds [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, **57**: 58-79.

[20] Chen S S, Cai F J, Xue H C, et al. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, **77**: 1065-1081.

[21] Zha G C, Bilgen E. Numerical solutions of Euler equations by using a new flux vector splitting scheme[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1993, **17**(2): 115-144.

[22] Toro E F, Vázquez-Cendón M E. Flux splitting schemes for the Euler equations[J]. *Computers & Fluids*, 2012, **70**: 1-12.

[23] 李馨东，胡宗民，张德良，等. 一种基于 AUSM 思想的通量分裂方法[J]. 计算物理，2015，**32**(1)：1-12. (LI Xin-dong, HU Zong-min, ZHANG De-liang, et al. A

flux splitting scheme based on AUSM[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2015, **32**(1): 1-12. (in Chinese))

[24] Garg N K. A class of upwind methods based on generalized eigenvectors for weakly hyperbolic systems [J]. *Numerical Algorithms*, 2020, **83**(3): 1091-1121.

[25] Sun Z Y, Inaba S, Xiao F. Boundary Variation Diminishing (BVD) reconstruction: A new approach to improve Godunov schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, **322**: 309-325.

[26] Dumbser M, Moschetta J M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **197**(2): 647-670.

A novel high-resolution flux difference splitting scheme

HU Li-jun*[1], ZHAO Kun-lei[2], YUAN Hai-zhuan[3]

(1. School of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China;
2. ICMSEC, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
3. School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: The conventional Roe scheme does not satisfy the entropy condition and encounters different forms of instability in calculation of shocks, such as the postshock oscillations in slowly moving shocks and the carbuncle phenomenon. Based on the Zha-Bilgen convection-pressure flux splitting method, a novel flux difference splitting scheme is proposed. Using the theory of Jordan form, a flux difference splitting method is constructed by adding generalized eigenvectors to calculate the convection subsystem. The pressure subsystem has a complete set of linearly independent eigenvectors, so it can be calculated by the conventional flux difference splitting scheme. In order to improve the resolution of contact discontinuities, the boundary variation diminishing (BVD) algorithm is implemented to reconstruct the density difference in the dissipation term of convection flux. The analysis of shock stability shows that the new scheme can effectively reduce numerical errors and thus suppress the instability. A series of numerical experiments demonstrate that the proposed flux difference splitting scheme has higher resolution and better robustness than the Roe scheme.

Key words: compressible flow; flux difference splitting scheme; Zha-Bilgen splitting method; boundary variation diminishing algorithm; high-resolution; robustness

引用本文/Cite this paper:

胡立军,赵昆磊,袁海专.一种新型的高分辨率通量差分裂格式[J].计算力学学报,2021,**38**(6):810-818.

HU Li-jun, ZHAO Kun-lei, YUAN Hai-zhuan. A novel high-resolution flux difference splitting scheme [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(6): 810-818.