第38卷第6期 计 算 力 学 学 报 Vol. 38, No. 6
2021年12月 Chinese Journal of Computational Mechanics December 2021

DOI:10.7511/jslx20201205003

一种预测层合板层间剪应力的新后处理方法

杨胜奇， 刘书田*

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116024)

摘 要:层合板是航空航天领域典型的承力构件,过大的层间应力是导致其分层失效的主要原因。准确的层间应力预测往往依赖于三维平衡方程后处理方法(TPM)。然而,该方法需要计算面内应力的一阶导,使得基于 C^0 型板理论构造的线性单元无法使用 TPM 计算横向剪应力。本文在三维平衡方程后处理方法的基础上,提出了一种新后处理方法(NPM)。新后处理方法通过虚功等效法消除了三维平衡方程后处理方法中产生的位移参数的高阶导。基于提出的新后处理方法和 C^0 型板理论,仅需使用线性单元就可以预测层合板的横向剪应力。为了验证所提方法的有效性,本文基于修正锯齿理论(RZT)和所提方法构造了一种 C^0 连续的三节点三角形线性板单元。数值算例表明,所提方法和三维平衡方程后处理方法具有相同的计算精度,提出的板单元能够准确高效地预测层合板的横向剪应力。此外,所提方法便于结合现有的有限元商用软件使用,基于商用软件中板壳单元获得的节点位移,使用新后处理方法极易获得准确的层间剪应力。

关键词:后处理方法;层合板;修正锯齿理论;层间应力;板单元

中图分类号:V214.8;O342 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2021)06-0796-06

1 引 言

层合板是由不同材料属性的薄片通过某种工艺(如粘接)复合而成,具有轻质、参数可设计性强和比强度比刚度高等优点,广泛应用于航空航天领域。在层合板中,通常不同材料之间连接界面的力学性能最为薄弱。过大的层间剪应力会导致层合板界面处发生分层破坏。分层破坏是层合板的主要失效形式[1],如纤维增强复合材料层合板损伤失效 50%以上是由分层引起[2]。因此,准确预测层合板的层间剪应力尤为重要。

现已提出了大量的层合板分析理论[3-8],如一阶剪切变形理论[3]、高阶剪切变形理论[4]和锯齿理论[5-6]等。这些理论能够准确地预测层合板的面内应力,然而大都无法直接通过本构方程获得准确的横向剪应力[9]。为了获得更准确的横向剪应力,Whitney[10]提出了三维平衡方程后处理方法(TPM),其广泛应用于层合板的横向剪应力预测[5,11-13]。然而,三维平衡方程后处理方法(TPM)需要计算面内应力的一阶导,使得简单的低阶单元无法使用 TPM 计算横向剪应力。以线性单元为例,其为常应变单元,面内应力的一阶导恒为零。因此,基于线性单元和三维平衡方程后处理方法得到的横向剪应力也恒为零。为了使用 TPM 获得更准确的横向剪应力,常使用高阶单元,如六节点三角形单元[11]、八节点四边形单元[12]和九节点四边形单元[13]。但高阶单元的使用往往会造成节点数目的增多和计算效率的降低。此外,还可以通过使用局部应变光顺[14]或局部应力光顺[15]的方法来获得面内应力的一阶导。这类方法能够使用 TPM 有效地获得少量节点的横向剪应力。然而,如果想要获得所有节点的横向剪应力,需要花费非常多的计算时间。因此,需要发展一种高效的新后处理方法来预测层合板的横向剪切应力。

本文提出了一种新后处理方法来预测层合板的横向剪应力。其优点在于可以使用低阶单元来预测层合板的层间剪应力。基于修正锯齿理论(RZT)[5]和新后处理方法,本文构造 C^0 连续的三节点三角形线性板单元。几个典型算例验证了新后处理方法的计算精度以及提出板单元的计算效率和精度。

2 修正锯齿理论(RZT)

修正锯齿理论(RZT)是一种 C^0 型锯齿理论,基于 RZT,层合板的位移场[5]可表示为

收稿日期:2020-12-05;**修改稿收到日期**:2020-12-29.

基金项目:国家自然科学基金重点项目(U1808215;11821202);高校基本科研业务费(DUT18ZD103);111 引智计划(B14013)资助项目.

作者简介:刘书田*(1962-),男,博士,教授,博士生导师(E-mail:stliu@dlut.edu.cn).

$$u^k(x,y,z)=u_0(x,y)+z\theta_x(x,y)+\phi_x^k(z)\Psi_x(x,y)$$
$$v^k(x,y,z)=v_0(x,y)+z\theta_y(x,y)+\phi_y^k(z)\Psi_y(x,y)$$
$$w(x,y,z)=w_0(x,y) \tag{1}$$

式中 k 表示第 k 层,u_0,v_0 和 w_0 为中面位移;θ_x 和 θ_y 分别为中面法线方向绕 y 轴和 x 轴的转角;Ψ_x 和 Ψ_y 为锯齿转角。ϕ_x^k 和 ϕ_y^k 为分段线性锯齿函数,

$$\phi_x^k(z)=\frac{1}{2}(1-\zeta_k)\bar{u}^{k-1}+\frac{1}{2}(1+\zeta_k)\bar{u}^k$$
$$\phi_y^k(z)=\frac{1}{2}(1-\zeta_k)\bar{v}^{k-1}+\frac{1}{2}(1+\zeta_k)\bar{v}^k \tag{2}$$

式中 ζ_k 为每层 z 方向的局部坐标,$\zeta_k=a_kz-b_k$,$\zeta_k\in(-1,1)$,$a_k=2/(z_{k+1}-z_k)$,$b_k=(z_{k+1}+z_k)/(z_{k+1}-z_k)$。$\bar{u}^k$ 为层与层交界面处的修正位移[5]。

3 三维平衡方程后处理方法(TPM)

基于修正锯齿理论,直接通过本构方程得到的横向剪应力精度低。为了获得更为精确的横向剪应力,常使用三维平衡方程后处理方法。忽略体力,三维平衡方程可表示为

$$\sigma_{x,x}^k+\tau_{xy,y}^k+\tau_{xz,z}^k=0,\ \sigma_{y,y}^k+\tau_{xy,x}^k+\tau_{yz,z}^k=0 \tag{3}$$

应用自由表面条件,由三维平衡方程得到的横向剪应力表达式可表示为

$$\bar{\tau}_{xz}^k(x,y,z)=-\int_{z_1}^{z}\sigma_{x,x}^k+\tau_{xy,y}^k\mathrm{d}z$$
$$\bar{\tau}_{yz}^k(x,y,z)=-\int_{z_1}^{z}\sigma_{y,y}^k+\tau_{xy,x}^k\mathrm{d}z \tag{4}$$

对于正交铺层层合板,可以使用两个独立的圆柱弯曲[16]来进一步简化式(4),式(4)可以重写为

$$\bar{\tau}_{xz}^k(x,y,z)=\Phi_1^k\theta_{x,xx}+\Phi_2^k\Psi_{x,xx}$$
$$\bar{\tau}_{yz}^k(x,y,z)=\Theta_1^k\theta_{y,yy}+\Theta_2^k\Psi_{y,yy} \tag{5}$$

式中 $\bar{\Phi}_i^k$ 和 $\bar{\Theta}_i^k$ 在附录A的式(A1)给出。如式(5)所示,由三维平衡方程后处理方法获得的横向剪应力表达式中含有位移参数的二阶导。这使得线性板单元无法基于该方法预测层合板的横向剪应力。因此,需要提出一种仅使用线性单元就能够预测层合板横向剪应力的新后处理方法。

4 新后处理方法(NPM)

为了消除式(5)位移参数的二阶导,提出一种虚功等效法。虚功等效法假定由本构关系获得的横向剪应力在虚剪应变上做的功等于由三维平衡方程获得的横向剪应力在虚剪应变上做的功。基于虚功等效法,可得

$$\int_A\int_{z_1}^{z_{n+1}}\delta\gamma_{xz}(\tau_{xz}-\bar{\tau}_{xz})\mathrm{d}z\mathrm{d}A=0$$
$$\int_A\int_{z_1}^{z_{n+1}}\delta\gamma_{yz}(\tau_{yz}-\bar{\tau}_{yz})\mathrm{d}z\mathrm{d}A=0 \tag{6}$$

式中 τ_{xz} 和 τ_{yz} 是由本构方程获得的横向剪应力,$\bar{\tau}_{xz}$ 和 $\bar{\tau}_{yz}$ 是由三维平衡方程获得的横向剪应力。

将本构方程和式(5)代入式(6),可得到由新后处理方法(NPM)获得的横向剪应力的表达式为

$$\bar{\tau}_{xz}^k(x,y,z)=\bar{\Phi}_1^k\theta_x+\bar{\Phi}_2^k\Psi_x+\bar{\Phi}_3^k w_{0,x}$$
$$\bar{\tau}_{yz}^k(x,y,z)=\bar{\Theta}_1^k\theta_y+\bar{\Theta}_2^k\Psi_y+\bar{\Theta}_3^k w_{0,y} \tag{7}$$

式中 $\bar{\Phi}_i^k$ 和 $\bar{\Theta}_i^k$ 在附录A的式(A2)给出。式(7)不再含有位移参数的二阶导数。对比式(5,7)可知,提出的新后处理方法能够解决基于三维平衡方程后处理方法无法使用线性单元计算层合板横向剪应力的难题。

5 C^0连续的三节点三角形单元

基于修正锯齿理论和新后处理方法,构造一种有效的 C^0 连续的三节点三角形线性板单元。对于三节点三角形单元,位移参数可以离散为

$$u_0=\sum_{i=1}^{3}L_iu_{0i},\ \theta_x=\sum_{i=1}^{3}L_i\theta_{xi},\ \Psi_x=\sum_{i=1}^{3}L_i\Psi_{xi}$$
$$v_0=\sum_{i=1}^{3}L_iv_{0i},\ \theta_y=\sum_{i=1}^{3}L_i\theta_{yi},\ \Psi_y=\sum_{i=1}^{3}L_i\Psi_{yi}$$
$$w_0=\sum_{i=1}^{3}L_iw_{0i} \tag{8}$$

式中 L_i 为面积坐标。

基于几何方程,单元应变向量可以表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{9}$$

式中 节点运动变量参数向量 $\boldsymbol{\delta}^e$ 和单元应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\boldsymbol{\delta}^e=(\boldsymbol{\delta}_1^e,\ \boldsymbol{\delta}_2^e,\ \boldsymbol{\delta}_3^e)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\delta}_i^e=(u_{0i},v_{0i}w_{0i},\theta_{xi},\Psi_{xi},\theta_{yi},\Psi_{yi}) \tag{10}$$
$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3)$$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix} L_{i,x} & 0 & 0 & zL_{i,x} & \phi_x^kL_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & L_{i,y} & 0 & 0 & 0 & zL_{i,y} & \phi_y^kL_{i,y} \\ L_{i,y} & L_{i,x} & 0 & zL_{i,y} & \phi_x^kL_{i,y} & zL_{i,x} & \phi_y^kL_{i,x} \\ 0 & 0 & L_{i,x} & L_i & \phi_{x,z}^kL_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{i,y} & 0 & 0 & L_i & \phi_{y,z}^kL_i \end{bmatrix} \tag{11}$$

基于新后处理方法,将式(8)代入由新后处理方法获得的横向剪应力式(7),可得

$$(\bar{\tau}_{xz}^k,\bar{\tau}_{yz}^k)^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\delta}^e \tag{12}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{B}}=(\bar{\boldsymbol{B}}_1,\bar{\boldsymbol{B}}_2,\bar{\boldsymbol{B}}_3)$

$$\bar{\boldsymbol{B}}_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\Phi}_3^kL_{i,x} & \bar{\Phi}_1^kL_i & \bar{\Phi}_2^kL_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Theta}_3^kL_{i,y} & 0 & 0 & \bar{\Theta}_1^kL_i & \bar{\Theta}_2^kL_i \end{bmatrix}$$

6 算 例

采用不同的复合材料层合板和复合材料测试所提出的新后处理方法的计算精度以及基于该方法提出板单元的计算效率和精度。选用层合板算例的材料特性和铺层顺序分别列入表1和表2。为了便于对比研究,横向剪应力的无量纲化为

$$\widetilde{w}=\frac{100E_2h^3w}{q_0a^4},\ (\widetilde{\tau}_{xz},\widetilde{\tau}_{yz})=\frac{h}{q_0a}(\overline{\tau}_{xz},\overline{\tau}_{yz})$$

表1 材料特性(单位:GPa)

Tab.1 Mechanical properties (unit:GPa)

Material	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	v_{12}	v_{13}	v_{23}
b	172.4	6.89	6.89	3.45	3.45	1.378	0.25	0.25	0.25
c	0.276	0.276	3.45	0.110	0.413	0.413	0.25	0.25	0.25
d	110	7.857	7.857	3.292	3.292	1.292	0.33	0.33	0.49
e	0.040	0.040	0.040	0.012	0.012	0.012	0.3	0.3	0.3

表2 层合板的铺层顺序

Tab.2 Stacking sequences for laminated plate

Laminate	Layer thickness ratio	Layer material
A	(1/3,1/3,1/3)	(b_0,b_{90},b_0)
B	(1/10,8/10,1/10)	(b_0,c_0,b_0)
C	(1/30,1/30,1/30,21/30,2/30,2/30,2/30)	$(d_0,d_{90},d_0,e_0,d_0,d_{90},d_0)$

6.1 新后处理方法的计算精度评估

为了评估新后处理方法的计算精度,选取具有三维弹性解(Exact)的承受双正弦载荷的简支层合板(Laminate A)进行研究。为了避免网格密度的影响,用解析法研究新后处理方法的计算精度。基于修正锯齿理论(RZT),分别由本构方程(CE)、三维平衡方程后处理方法(TPM)和新后处理方法(NPM)得到层合板的横向剪应力,如图1所示。可以看出,新后处理方法和三维平衡方程后处理方法具有相同的计算精度。与三维弹性解(Exact)[17]对比可知,由本构方程获得的横向剪应力存在较大误差,修正锯齿理论(RZT)结合后处理方法能够获得高精度的横向剪应力。

6.2 提出板单元的计算效率和计算精度评估

本文基于修正锯齿理论(RZT)和新后处理方法(NPT)构造一种C^0连续的三节点三角形单元,为了评估提出单元的计算效率,与基于三维平衡方程后处理方法的六节点三角形单元[11]进行对比。表3给出了不同网格下两个单元的节点数目和计算耗时。对于相同的网格(12×12),六节点三角形单元的节点数目是三节点三角形单元的3.7倍,六节点三角形单元的计算时间是三节点三角形单元的11.43倍。并且随着网格的加密,倍数呈现逐渐增大的趋势。本文进一步比较了在相同计算精度下两种单元的计算耗时。由表4可知,当单元的最大误差为0.8%时,三节点三角形单元网格数为20×20,计算耗时为1.74 s(表3),六节点三角形单元的网格数为12×12,计算耗时为3.20 s(表3)。通过对比可知,基于新后处理方法构造的三节点三角形板单元比基于三维平衡方程后处理方法构造的六节点三角形单元具有更高的计算效率。

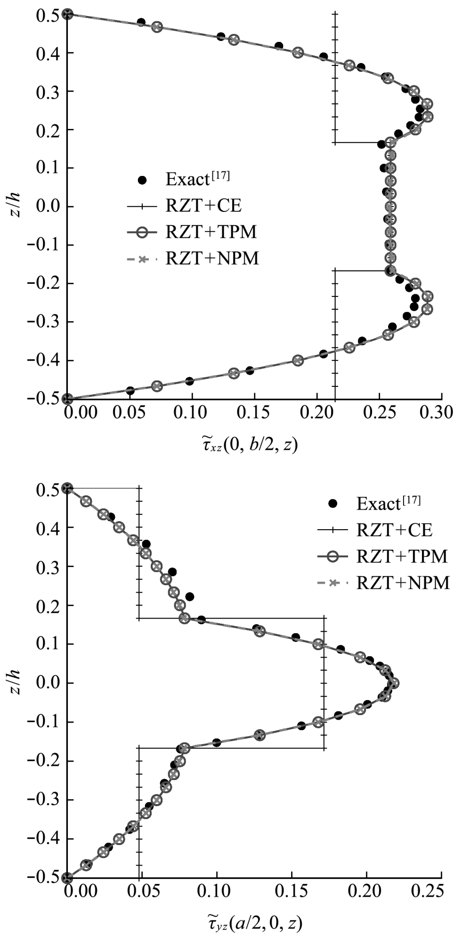

图1 层合板的横向剪应力对比(Laminate A,$a/h=4$)

Fig.1 Comparison of transverse shear stresses of laminated plates (Laminate A,$a/h=4$)

表3 两种板单元自由度数及计算时间的比较

Tab.3 Comparison of the number of DOF and computing time for two plate elements

Mesh density		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
Number of elements		32	128	288	512	800
Number of nodes	NPT	25	81	169	289	441
	TPT	81	289	625	1089	1681
	TPT/NPT	3.24	3.57	3.70	3.77	3.81
Elapsed time/s	NPT	0.02	0.08	0.27	0.71	1.74
	TPT	0.13	0.82	3.20	9.88	27.10
	TPT/NPT	6.50	10.25	11.43	13.92	15.57

表 4　两种板单元位移和应力的收敛性（Laminate A，$a/h=4$）

Tab. 4　Convergence of displacements and stresses for two elements (Laminate A，$a/h=4$)

Mesh	NPT		TPT	
	$\tilde{\tau}_{xz}(0,\frac{b}{2},0)$	$\tilde{\tau}_{yz}(\frac{a}{2},0,0)$	$\tilde{\tau}_{xz}(0,\frac{b}{2},0)$	$\tilde{\tau}_{yz}(\frac{a}{2},0,0)$
4×4	0.206(20%)	0.189(13%)	0.251(2.7%)	0.204(6.4%)
8×8	0.244(5.4%)	0.214(1.8%)	0.257(0.4%)	0.214(1.8%)
12×12	0.250(3.1%)	0.217(0.5%)	0.257(0.4%)	0.216(0.9%)
16×16	0.254(1.6%)	0.217(0.5%)	0.258(0.0%)	0.217(0.5%)
20×20	0.256(0.7%)	0.218(0.0%)	0.258(0.0%)	0.217(0.5%)
Analytical	0.258	0.218	0.258	0.218

图 2 和图 3 给出了由提出的线性板单元获得的不同夹层板的横向剪应力。Laminate B 是由单层面板和芯层构成的三层夹层板，Laminate C 的面板是由多层复合材料层合板构成。可以看出，提出的板单元结合新后处理方法（NPM）获得的横向剪应力与三维弹性解（Exact）[17] 吻合较好，而由本构方程（CE）获得的横向剪应力具有较大误差。

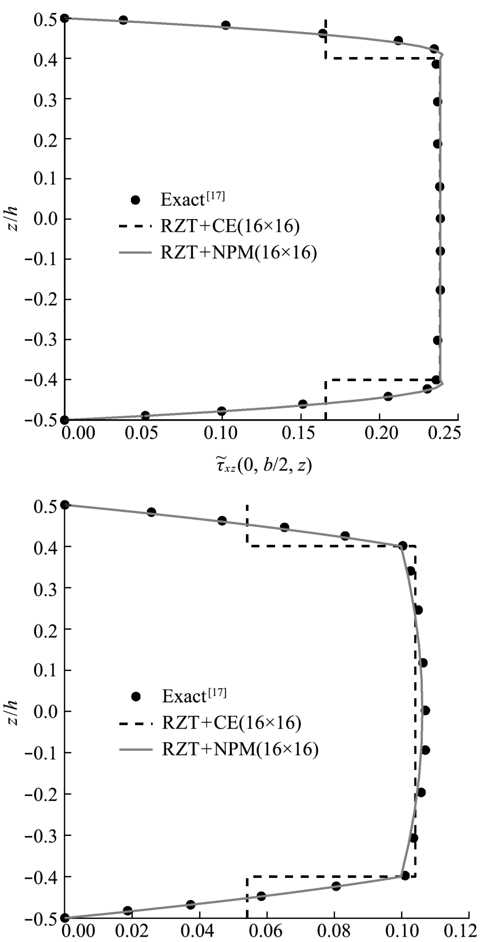

图 2　三层夹层板的横向剪应力对比（Laminate B，$a/h=4$）

Fig. 2　Comparison of transverse shear stresses of three-ply sandwich plates (Laminate B，$a/h=4$)

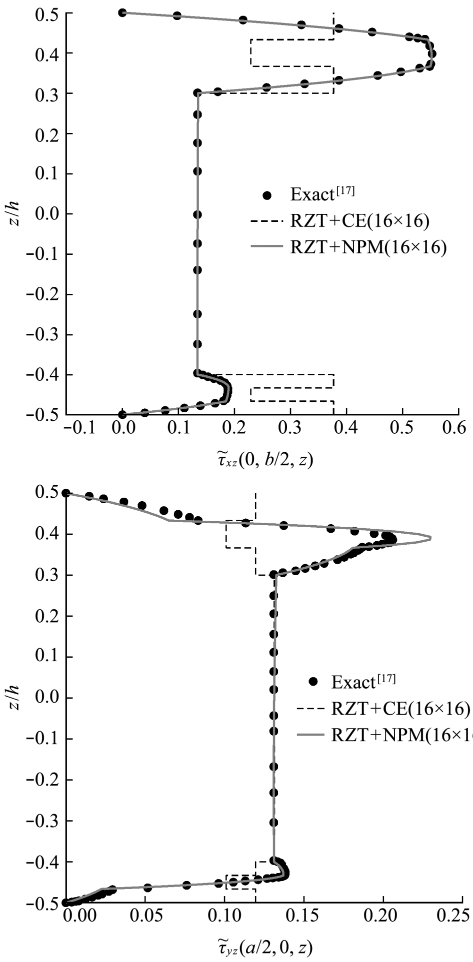

图 3　多层夹层板的横向剪应力对比（Laminate C，$a/h=10$）

Fig. 3　Comparison of transverse shear stresses of multilayered sandwich plates (Laminate C，$a/h=10$)

6.3　基于新后处理方法和商用软件预测层合板的层间应力

工程中常用 3 维单元计算层合板的层间应力，该方法存在计算效率低的缺点。而使用商用软件中现有的板壳单元，只能准确预测层合板的变形和面内应力，无法准确预测层间剪应力。由于使用新后处理方法计算层间剪应力具有无需提高单元阶次的优点。因此，可以结合商用软件和新后处理方法来预测层合板的层间剪应力。本文结合 Abaqus 和新后处理方法，验证上述思路的可行性。首先，基于 Abaqus 的 S4R5 薄壳单元（对应一阶剪切变形理论），获得层合板的节点位移；然后使用获得的节点位移和新后处理方法，获得层合板的层间应力。本文以承受正弦载荷（$q=q_0\sin(\pi x/a)$）的对边简支对边自由的层合板（Laminate A）来验证该方法的精度。层合板厚度为 3 mm，长和宽为 60 mm。图 4 给出了不同方法预测的层合板的横向剪应力。3D-FE 表示由 Abaqus 软件使用 3 维单元（C3D8R）预测的结果。FSDT＋NPM 表示先由 Abaqus 软件使用薄壳单元（S4R5）获得节点位

移，然后由新后处理方法获得的横向剪应力。在划分相同面内网格情况（60×60）下，3D-FE 自由度数为 692106，壳单元自由度为 18605，3D-FE 的自由度数是壳单元的 37.2 倍。可以看出，FSDT＋NPM 的预测结果与 3D-FE 结果和三维弹性解（Exact）[17]吻合较好，证明基于新后处理方法和商用软件预测层合板的层间应力是可行的。此外，由于针对特定单元，由新后处理方法获得横向剪应力的表达式(7)可以显式给出，新后处理方法也可以很容易集成到商用软件中。

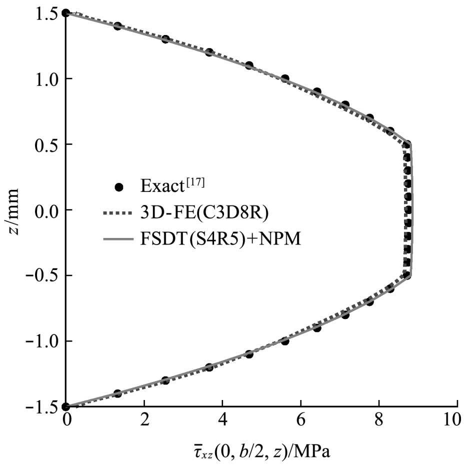

图 4　层合板的横向剪应力对比（Laminate A，$a/h=20$）

Fig. 4　Comparison of transverse shear stresses of laminated plates (Laminate A，$a/h=20$)

7　结　论

为了实现使用低阶单元准确预测层合板层间剪应力的目的，本文提出了一种新后处理方法。该方法使用虚功等效法消除了三维平衡方程后处理方法中产生的位移参数高阶导，解决了三维平衡方程后处理方法无法使用低阶单元计算层间剪应力的难题。基于修正锯齿理论和新后处理方法，构造了一种 C^0 连续的三节点三角形线性单元。通过经典算例验证了新后处理方法的计算精度以及提出线性单元的计算效率和精度，可得到如下结论。

（1）新后处理方法和三维平衡方法后处理方法具有相同的计算精度。

（2）基于新后处理方法和修正锯齿理论，仅使用线性单元就可以获得高精度的横向剪应力。

（3）新后处理方法结合现有的有限元商用软件，可以高效高精度地预测层合板的层间剪应力。

附录 A：

$$\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1^k,\Phi_2^k)=\int_{z_1}^{z} C_{11}^k(A_1-z,A_2-\phi_x^k)\,\mathrm{d}z$$

$$\boldsymbol{\Theta}=(\Theta_1^k,\Theta_2^k)=\int_{z_1}^{z} C_{22}^k(B_1-z,B_2-\phi_y^k)\,\mathrm{d}z \quad \text{(A1)}$$

式中 $$(A_1,A_2)=\int_{z_1}^{z_{n+1}} C_{11}^k(z,\phi_x^k)\,\mathrm{d}z\Big/\int_{z_1}^{z_{n+1}} C_{11}^k\,\mathrm{d}z$$

$$(B_1,B_2)=\int_{z_1}^{z_{n+1}} C_{22}^k(z,\phi_y^k)\,\mathrm{d}z\Big/\int_{z_1}^{z_{n+1}} C_{22}^k\,\mathrm{d}z$$

C_{ij}^k 为第 k 层坐标转换后的弹性刚度系数。

$$\bar{\Phi}_i^k=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{e}_i,\ \bar{\Theta}_i^k=\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{e}_i \quad (i=1\sim3) \quad \text{(A2)}$$

式中 $$\boldsymbol{D}_x=\left[\int_{z_1}^{z_{n+1}}(\boldsymbol{B}_{xz}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi})\,\mathrm{d}z\right]^{-1}\int_{z_1}^{z_{n+1}}\boldsymbol{B}_{xz}^{\mathrm{T}}C_{44}\boldsymbol{B}_{xz}\,\mathrm{d}z$$

$$\boldsymbol{D}_y=\left[\int_{z_1}^{z_{n+1}}(\boldsymbol{B}_{yz}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{d}z\right]^{-1}\int_{z_1}^{z_{n+1}}\boldsymbol{B}_{yz}^{\mathrm{T}}C_{55}\boldsymbol{B}_{yz}\,\mathrm{d}z$$

$$\boldsymbol{B}_{xz}=(1,\phi_{x,z}^k,1),\ \boldsymbol{B}_{yz}=(1,\phi_{y,z}^k,1)$$

$\boldsymbol{e}_i$ 为三维单位列向量。

参考文献（References）：

［1］ 赵丽滨，龚　愉，张建宇．纤维增强复合材料层合板分层扩展行为研究进展［J］．航空学报，2019，**40**(1)：522509．(ZHAO Li-bin，GONG Yu，ZHANG Jian-yu. A survey on the delamination growth behavior in fiber reinforced composite laminates［J］. *Acta Aero-nautica et Astronautica Sinica*，2019，**40**(1)：522509．(in Chinese))

［2］ 孙长玺．基于形状等效和刚度折减的复合材料分层损伤分析方法［D］．大连理工大学，2016．(SUN Chang-xi. Analysis Method for Composite Delamination Based on Shape Simplification and Stiffness Degradation［D］. Dalian University of Technology，2016．(in Chinese))

［3］ Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic，elastic plates［J］. *Journal of Applied Mechanics*，1951，**18**(1)：31-38.

［4］ Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates［J］. *Journal of Applied Mechanics*，1984，**51**(4)：745-752.

［5］ Tessler A，di Sciuva M，Gherlone M. A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams［J］. *Journal of Composite Materials*，2009，**43**(9)：1051-1081.

［6］ 杨胜奇，张永存，刘书田．一种准确预测层合梁结构层间剪应力的新锯齿理论［J］．航空学报，2019，**40**(11)：223028．(YANG Sheng-qi，ZHANG Yong-cun，LIU Shu-tian. A new zig-zag theory for accurately inter-laminar shear stress of laminated beam structures［J］. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*，2019，**40**(11)：223028．(in Chinese))

［7］ 林　皋，张鹏冲．板结构计算模型的新发展［J］．计算力学学报，2019，**36**(4)：429-440．(Lin Gao，ZHANG Peng-chong. New development of the computational model for the analysis of laminated plate structures［J］. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2019，**36**(4)：429-440．(in Chinese))

［8］ 曹彩芹，宋永超．多层正交异性矩形薄板弯曲振动稳

定解析解[J]. 计算力学学报，2021，**38**(5)：595-603. (CAO Cai-qin，SONG Yong-chao. Analytical solutions for bending，vibration and stability of multilayer orthotropic rectangular thin plates[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2021，**38**(5)：595-603. (in Chinese))

[9] 刘人怀，薛江红. 复合材料层合板壳非线性力学的研究进展[J]. 力学学报，2017，**49**(3)：487-506. (LIU Ren-huai，XUE Jiang-hong. Development of nonlinear mechanics for laminated composite plates and shells [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*，2017，**49**(3)：487-506. (in Chinese))

[10] Whitney J M. Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates[J]. *Journal of Composite Materials*，1972，**6**(4)：426-440.

[11] Ren X H，Chen W J，Wu Z. A C^0-type zig-zag theory and finite element for laminated composite and sandwich plates with general configurations[J]. *Archive of Applied Mechanics*，2012，**82**(3)：391-406.

[12] Biswas D，Ray C. An improved isoparametric quadratic element based on refined zigzag theory to compute interlaminar stresses of multilayered anisotropic plates[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*，2019，**119**(12)：1245-1278.

[13] Khandelwal R P，Chakrabarti A，Bhargava P. An efficient FE model and Least Square Error method for accurate calculation of transverse shear stresses in composites and sandwich laminates[J]. *Composites Part B：Engineering*，2012，**43**(4)：1695-1704.

[14] Tessler A，Riggs H R. Accurate interlaminar stress recovery from finite element analysis[R]. NASA-TM-109149. 19950005402.

[15] Eijo A，Oñate E，Oller S. A four-noded quadrilateral element for composite laminated plates/shells using the refined zigzag theory[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*，2013，**95**(8)：631-660.

[16] Iurlaro L，Gherlone M，Di Sciuva M，et al. Refined Zigzag Theory for laminated composite and sandwich plates derived from Reissner's Mixed Variational Theorem[J]. *Composite Structures*，2015，**133**：809-817.

[17] Pagano N J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates[J]. *Journal of Composite Materials*，1970，**4**(1)：20-34.

A novel post-processing method for predicting the interlaminar shear stresses of laminated plates

YANG Sheng-qi， LIU Shu-tian*

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment，Department of Engineering Mechanics，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China)

Abstract：Laminated plates are typical bearing members in the aerospace industry. Excessive interlaminar shear stresses are the main cause of delamination failure. The accurate prediction of the interlaminar shear stresses often depends on the post-processing method (TPM) for three-dimensional equilibrium equations. However，this method needs to calculate the first derivative of the in-plane stresses，so that simple linear element based on the C^0 plate theories cannot use TPM to calculate the transverse shear stresses. Based on the TPM，a novel post-processing method (NPM) is proposed in this paper. The NPT eliminates the high-order derivative of displacement parameters generated in the TPM through the Virtual Work Equivalent Method (VWEM). So，accurate transverse shear stresses can be obtained by linear elements using the NPT and C^0 plate theories. To verify the effectiveness of the NPT，an efficient C0-continuous three-node triangular plate element is formulated based on the refined zigzag theory (RZT) and the NPM. Numerical examples show that the proposed NPM have the same calculation accuracy as the TPM，and the proposed plate element can accurately and efficiently predict the transverse shear stresses of laminates. In addition，the NPM is very easy to use in combination with existing commercial finite element software. Based on the nodal displacements obtained by the plate and shell elements in commercial software，the NPM can easily obtain accurate interlaminar shear stresses.

Key words：post-processing method；laminated plate；refined zigzag theory；interlaminar stresses；plate element

引用本文/Cite this paper：

杨胜奇，刘书田. 一种预测层合板层间剪应力的新后处理方法[J]. 计算力学学报，2021，**38**(6)：796-801.

YANG Sheng-qi，LIU Shu-tian. A novel post-processing method for predicting the interlaminar shear stresses of laminated plates[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2021，**38**(6)：796-801.