

DOI: 10.7511/jslx20200812001

# 建筑结构基于巴斯金风速谱的系列 风振响应的简明封闭解

李 暉<sup>1</sup>, 张梦丹<sup>1</sup>, 姜 琰<sup>1</sup>, 葛新广<sup>\*1,2</sup>

(1. 广西科技大学 土木建筑工程学院, 柳州 545006; 2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

**摘要:**针对巴斯金风速谱激励下的建筑结构顺风向振动响应表达式复杂的问题,提出了一种简明封闭解法。巴斯金随机谱广泛应用于描述脉动风、随机地震动和路面不平顺等各种随机激励,本文基于留数定理给出巴斯金风速功率谱的二次正交式。综合运用复模态法和虚拟激励法获得了建筑结构系列响应(位移、层间位移及其变化率)功率谱的统一形式的二次正交式,并根据谱矩的定义获得了建筑结构系列响应的方差和谱矩及绝对加速度方差的简明封闭解。运用本文方法对一8层建筑结构进行分析,并与传统虚拟激励法进行对比研究,表明本文所得封闭解正确,并可用于验证虚拟激励法在谱矩和方差分析时的精度和效率。由于本文方法含有复模态法,故可用于各类线性结构基于巴斯金谱的随机响应分析和基于动力可靠度及舒适度的动力优化分析。

**关键词:**巴斯金风速谱; 响应功率谱的二次正交式; 谱矩; 方差; 简明封闭解

**中图分类号:** TU318      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1007-4708(2021)06-0739-09

## 1 引言

近年来,随着结构分析和建筑水平的不断提高,建筑结构向着高、大、柔和细的方向发展,结构风振效应更加突出。根据产生机理,风对建筑结构的振动影响分为顺风向和横风向振动。脉动风是引起建筑顺风向随机振动的主要因素,横风向振动则较为复杂,根据雷诺数将风振细分为亚临界、超临界和跨临界振动,其中亚临界和跨临界振动为确定性周期振动,而超临界振动则具有随机性,相对于顺风向振动影响较小<sup>[1-4]</sup>。风工程领域研究风对结构的影响主要有风洞试验<sup>[5,6]</sup>和理论分析<sup>[7-14]</sup>,风洞试验能准确考虑风场与建筑的相互作用,根据相似性准则制作不同的缩尺模型,通过刚体测压试验获得结构表面的风压体型系数,通过节段模型试验研究结构的振动响应,通过气弹模型试验研究结构整体的气动弹性特性,但试验成本较高;而理论研究则通过分析大量试验资料,利用功率谱概念来表述脉动风对结构的作用,所得结果基本能满足工程精度要求。因此,风的随机理论分析是结构风振响应分析的重要方法。工程上常采用风速谱描述

脉动风的随机过程,根据风速谱的统计方法分为两类,一类是将强风记录仪通过超低频滤波器,直接获得脉动风的功率谱密度函数,Davenport谱<sup>[11]</sup>和Simiu谱<sup>[12]</sup>属于这一类,均采用分数指数形式表示,是根据强风记录,不易获得结构响应的简明封闭解<sup>[2,3,7]</sup>;另外一类是将强风记录通过相关分析,得到相关曲线,再利用Wiener-Khinchin公式获得风速谱的功率谱密度函数,而巴斯金风速谱属于此类,其采用整数指数(有理式)形式,目前仅获得偶数阶响应谱矩解<sup>[10,13]</sup>,且表达式也比较复杂,又无1阶谱矩的响应解,无法用于基于首超破坏准则及Vanmark假设的动力可靠度分析<sup>[15,16]</sup>。

本文针对巴斯金谱激励下结构的风振响应分析解析表达式复杂或者需要数值积分的问题,提出了一种分析结构风振响应0~2阶谱矩及4阶谱矩的简明封闭解法。首先,基于留数定理<sup>[17]</sup>提出了巴斯金谱的二次正交式;其次,利用复模态方法<sup>[7,18]</sup>和虚拟激励法<sup>[19]</sup>提出了结构系列响应(结构层绝对位移及其振动速度、层间位移及其变化率)的频响函数的二次正交式,进而获得结构系列响应功率谱密度函数的二次正交式;最后,根据随机振动理论中谱矩的定义<sup>[18]</sup>,获得结构风振系列响应的0~2阶和4阶的谱矩的简明封闭解。

## 2 巴斯金谱的二次正交式

建筑结构在强风作用下的振动是由脉动风压

收稿日期: 2020-08-12; 修改稿收到日期: 2021-01-03.

基金项目: 国家自然科学基金(51468005); 广西科技大学研究生教育创新计划(GKYC202010); 广西科技基地和人才专项(桂科 AD19110152)资助项目.

作者简介: 葛新广\* (1977-), 博士, 讲师  
(E-mail: gxgzlr.2008@163.com).

引起,脉动风压与平均风速相关并具有空间相关性,离地高度  $H$  的脉动风载  $p_f(H, t)$  表示为<sup>[7,10]</sup>

$$p_f(H, t) = I_0(H) B(H) u(t) \quad (1)$$

$$B(H) = \sqrt{\frac{24K_r}{\mu_z(H)}} \bar{p}(H) \quad (2)$$

式中  $K_r$  为地面粗糙度系数,  $\mu_z(H)$  为离室外地面  $H$  高度处的风压高度变化系数,  $I_0(H)$  是均值为 0, 方差为 1 的随机变量, 用来表示脉动风压的空间相关性,  $u(t)$  为描述脉动风速的随机过程,  $\bar{p}(H)$  为离地  $H$  高度处的平均风压力<sup>[7,10]</sup>,

$$\bar{p}(H) = \mu_s(H) \mu_z(H) \omega_0 A \quad (3)$$

式中  $\mu_s(H)$  和  $\omega_0$  分别为离地  $H$  高度处的风荷载体型系数和基本风压,  $A$  为结构风压力计算的迎风面积。

巴斯金风速谱的功率谱采用有理式<sup>[2,13]</sup>,

$$S_u(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha\omega^2}{[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (4)$$

式中  $\alpha = 4.8067 \times 10^{-4} \bar{V}_{10}$ ,  $\beta = 3.9925 \times 10^{-3} \bar{V}_{10}$ ,  $\bar{V}_{10}$  表示离地高度 10 m 的标准风速。

为了便于获得简明封闭解, 利用留数定理<sup>[17]</sup> 获得其二次正交式,

$$S_u(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{\omega^2 + \beta_r} \quad (5)$$

式中  $\bar{\beta}_r = -t_r$ ,  $\bar{\alpha}_r = \frac{2\alpha t_r}{t_r - t_k}$  ( $k \neq r$ ),  $t_{1,2} = \beta^2 - \alpha^2 \pm 2\alpha\beta j$ ,  $j = \sqrt{-1}$ 。

由于脉动风对建筑结构顺风向作用具有显著的空间相关性, 且竖向高度相关性最为明显, 则考虑高度相关性的平稳脉动风压力的功率谱  $S_{P_f}(H_i, H_j, \omega)$ <sup>[7,10]</sup> 为

$$S_{P_f}(H_i, H_j, \omega) = \rho_{ij} S_u(\omega) \quad (6)$$

$$\rho_{ij} = \exp\left[-\frac{1}{60} |H_i - H_j|\right] B(H_i) B(H_j) \quad (7)$$

### 3 结构响应功率谱的简明解

建筑结构在横风向荷载  $p_f(t)$  作用下的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}_f(t) \quad (8)$$

式中  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{x}$  分别为结构各层相对于地面的加速度、速度和位移向量,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为结构质量、阻尼和刚度矩阵,  $\mathbf{p}_f(t) = [p_f(H_1, t) \cdots p_f(H_n, t)]^T$ ,  $n$  为结构总层数。

对于常规结构, 风对建筑结构的作用取前  $m$  个振型, 则结构的位移向量可由阵型表示为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}_m \mathbf{q} \quad (9)$$

式中  $\boldsymbol{\phi}_m$  为结构前  $m$  振型矩阵, 为  $n \times m$  矩阵;  $\mathbf{q}$

为广义坐标向量,  $\mathbf{q} = [q_1 \cdots q_m]^T$ ;  $\mathbf{T}$  为矩阵转置。

把式(9)代入式(8), 并利用实模态的正交性, 结构的振动方程改写为

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\xi\bar{\omega}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\omega}^2\mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma}\{\mathbf{I}_0(\mathbf{H})\mathbf{B}(\mathbf{H})\}u(t) \quad (10)$$

式中  $\{\mathbf{I}_0(\mathbf{H})\mathbf{B}(\mathbf{H})\} = [\mathbf{I}_0(H_1)B(H_1) \cdots \mathbf{I}_0(H_n)B(H_n)]^T$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\phi}_m^T / (\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi})$ ,  $\xi$  和  $\bar{\omega}$  分别为结构振动系统阻尼比和圆频率矩阵, 均为对角阵。

引入状态变量:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}}]^T \quad (11)$$

则式(10)改写为

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y} = \bar{\boldsymbol{\gamma}}\{\mathbf{I}_0(\mathbf{H})\mathbf{B}(\mathbf{H})\}u(t) \quad (12)$$

式中  $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{O}_1]$ ,  $\mathbf{O}_1$  为  $m \times n$  的矩阵, 其元素均为 0。

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2\xi\bar{\omega} & \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\omega}^2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -\mathbf{E}_1 \end{bmatrix}$$

式中  $\mathbf{O}_2$  为  $m \times m$  矩阵, 其元素均为 0;  $\mathbf{E}_1$  为  $m \times m$  的单位对角矩阵。

根据复模态法理论<sup>[7]</sup>, 式(12)存在左右特征向量  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{U}$  和特征值矩阵  $\mathbf{P}$  使之解耦, 三者存在关系,

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{U} / (\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U}) \quad (13)$$

式中特征值矩阵  $\mathbf{P}$  为对角阵, 其元素的实部为正实数。

引入复模态变换,

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{z} \quad (14)$$

由复模态理论<sup>[7,19]</sup>, 式(12)改写为

$$\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{P} \mathbf{z} = \boldsymbol{\eta}\{\mathbf{I}_0(\mathbf{H})\mathbf{B}(\mathbf{H})\}u(t) \quad (15)$$

式中  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}^T \bar{\boldsymbol{\gamma}} / (\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U})$ , 其为  $2m \times n$  矩阵。

由于  $\mathbf{P}$  为对角阵, 式(15)的分量形式为

$$\dot{z}_k + p_k z_k = \sum_{i=1}^n \eta_{k,i} I_0(H_i) B(H_i) u(t) \quad (k = 1 \sim 2m) \quad (16)$$

式中  $\eta_{k,i}$  表示  $\boldsymbol{\eta}$  矩阵第  $k$  行第  $i$  列的元素。

根据虚拟激励法<sup>[19]</sup>, 式(16)的频域解为

$$z_k(\omega) = \frac{1}{p_k + j\omega} \sqrt{S_u(\omega)} e^{j\omega t} \sum_{i=1}^n \eta_{k,i} I_0(H_i) B(H_i) \quad (17)$$

由式(9, 11, 14), 结构响应的频域解为

$$x_l = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{2m} \phi_{l,s} U_{s,k} z_k(\omega) \quad (18a)$$

$$\dot{x}_l = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{2m} \phi_{l,s} U_{s+m,k} z_k(\omega) \quad (18b)$$

$$\Delta x_l = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{2m} \Delta \phi_{l,s} U_{s,k} z_k(\omega) \quad (18c)$$

$$\Delta \dot{x}_l = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{2m} \Delta \phi_{l,s} U_{s+m,k} z_k(\omega) \quad (18d)$$

式中  $\Delta x_i$  和  $\Delta \dot{x}_i$  分别为层间位移及其变化率,  $\phi_{l,s}$  表示  $l$  层第  $s$  阵型参数,  $\Delta \phi_{l,s} = \phi_{l,s} - \phi_{l-1,s}$  表示第  $l$  层第  $s$  阵型的层间参数, 且 1 层时,  $\Delta \phi_{1,s} = \phi_{1,s}$ ;  $U_{s,k}$  表示右特征向量  $U$  第  $s$  行第  $k$  列的元素, 为模态强度系数。

从式(18)可知, 结构响应的位移及速度、层间位移及其变化率可统一表示为

$$D_l = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{2m} \varphi_{l,s} \bar{U}_{s,k} z_k(\omega) \quad (19)$$

式中  $D_l$  为结构响应,  $\bar{U}_{s,k}$  为结构模态强度系数。

由虚拟激励法<sup>[19]</sup>,  $D_l$  的响应功率谱为

$$S_{D_l}(\omega) = \sum_{s_2=1}^m \sum_{s_1=1}^m \sum_{k=1}^{2m} \sum_{i=1}^{2m} \varphi_{l,s_1} \varphi_{l,s_2} \bar{U}_{s_1,k} \bar{U}_{s_2,i} z_k(\omega) z_i^*(\omega) \quad (20)$$

式中  $z_i^*(\omega)$  是  $z_i(\omega)$  的共轭项。

式(20)可获得其更为简明的表达式,

$$S_{D_l}(\omega) = G_{D_l}(\omega) S_u(\omega) \quad (21)$$

式中  $G_{D_l}(\omega)$  为  $D_l$  的频响响应特征值函数, 具体推导见附录 A, 其二次正交式为

$$G_{D_l}(\omega) = \sum_{k=1}^{2m} \frac{\mu_k \lambda_k}{p_k^2 + \omega^2} + \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=k+1}^{2m} \frac{\mu_{ik} \lambda_{ik}}{p_i + p_k} \times \left[ \frac{2p_i}{p_i^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right] \quad (22)$$

由式(21)可知, 建筑结构基于巴斯金风谱的动力响应功率谱可表示为结构频率响应特征值函数和巴斯金风速功率谱的代数乘积关系, 具有表达式简洁的特点。由式(5,22)可知, 式(21)所表示的结构响应功率谱为二次正交形式, 为本文获得结构响应谱矩和方差简明封闭解奠定基础。

### 4 风振系列响应谱矩的简明封闭解

根据随机振动理论<sup>[19]</sup>, 线性结构位移响应的 0 阶谱矩等于位移响应的方差; 位移响应的 2 阶谱矩等于速度响应的 0 阶谱矩等于速度响应的方差; 位移响应的 4 阶谱矩等于速度响应的 2 阶谱矩等于加速度响应的 0 阶谱矩, 即加速度的方差。位移响应的方差、速度响应的方差及位移响应的 0~2 阶谱矩是基于 Markov 分布的动力可靠度分析的关键参数<sup>[15,16]</sup>。加速度方差是结构风振舒适度分析的主要参数<sup>[20,21]</sup>。为此, 需要对结构位移响应的 0~2 阶及 4 阶谱矩进行分析。

根据随机振动理论, 结构动力响应的谱矩为

$$\alpha_{D_l,q} = 2 \int_0^\infty S_{D_l}(\omega) \omega^q d\omega \quad (q=0 \sim 2) \quad (23)$$

#### 4.1 结构响应 0~2 阶谱矩

把式(22)代入式(23), 结构响应的  $q$  阶谱矩为

$$\alpha_{D_l,q} = \sum_{k=1}^{2m} \mu_k \lambda_k \chi_{p_k,q} + \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=k+1}^{2m} \frac{\lambda_{ik} \mu_{ik}}{p_i + p_k} \times (2p_i \chi_{p_i,q} + 2p_k \chi_{p_k,q}) \quad (24)$$

$$\text{式中 } \chi_{p_k,q} = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{\bar{\alpha}_r \omega^q}{\omega^2 + \beta_r} \frac{1}{p_k^2 + \omega^2} d\omega \quad (25)$$

对  $\chi_{p_k,q}$  进行积分, 获得封闭解, 推导过程见附录 B。

$$\chi_{p_k,0} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{p_k^2 - \beta_r} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} - \frac{1}{p_k} \right] \quad (26)$$

$$\chi_{p_k,1} = \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{2\pi} \frac{1}{p_k^2 - \beta_r} (\ln p_k^2 - \ln \beta_r) \quad (27)$$

$$\chi_{p_k,2} = \sum_{r=1}^2 \left[ \frac{\bar{\alpha}_r}{2p_k} - \frac{1}{\pi} \beta_r \chi_{p_k,0} \right] \quad (28)$$

### 4.2 结构层绝对加速度的方差

建筑结构风振舒适度取决于结构层风振的绝对加速度<sup>[20,21]</sup>。由随机振动理论可知, 结构绝对加速度的方差=绝对位移变化率的 2 阶谱矩。由式(18b,24)可知, 结构层绝对加速度可表示为

$$\sigma_{\ddot{x}_i}^2 = \alpha_{\ddot{x}_i,2} = \sum_{k=1}^{2m} \mu_{k,k} \lambda_{k,k} \chi_{p_k,2} + \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=k+1}^{2m} \frac{\lambda_{ik} \mu_{ik}}{p_i + p_k} \times (2p_i \chi_{p_i,2} + 2p_k \chi_{p_k,2}) \quad (29)$$

$$\text{式中 } \mu_{i,k} = \sum_{s_2=1}^m \sum_{s_1=1}^m \phi_{l,s_1} \phi_{l,s_2} U_{s_1+m,k} U_{s_2+m,i}$$

## 5 算 例

某海边地带(A类地区)有一座 8 层的混凝土结构建筑, 地面粗糙度系数为  $K_r = 0.00129$ , 离地高度 10 m 的标准平均风速  $\bar{V}_{10} = 33.5$  m/s。其中第一层至第三层的层间质量为  $m_{01} \sim m_{03} = 400 \times 10^3$  kg, 层间刚度为  $k_{01} \sim k_{03} = 360 \times 10^3$  N/m, 迎风面积为 200 m<sup>2</sup>, 各层高度均为 4.2 m; 第四层至第八层的层间质量为  $m_{04} \sim m_{08} = 300 \times 10^3$  kg, 层间刚度为  $k_{04} \sim k_{08} = 300 \times 10^3$  N/m, 迎风面积均为 120 m<sup>2</sup>, 各层高度均为 3.6 m。结构的阻尼比  $\xi = 0.05$ 。

#### 5.1 巴斯金风速谱的等效形式验证

图 1 为本文所提巴斯金谱的二次正交式与其有理式的对比, 两者完全重合, 验证了本文所提二次正交式的正确性。

#### 5.2 位移功率谱对比分析

图 2 和图 3 为本文方法获得的结构响应功率谱与虚拟激励法的响应功率谱的对比。可以看出两者完全吻合, 说明本文所提结构响应功率谱密度函数二次正交式的正确性。

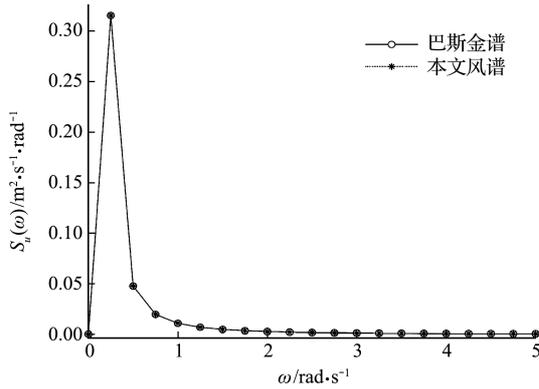


图1 风速谱对比

Fig. 1 Comparison diagram of wind speed spectrum

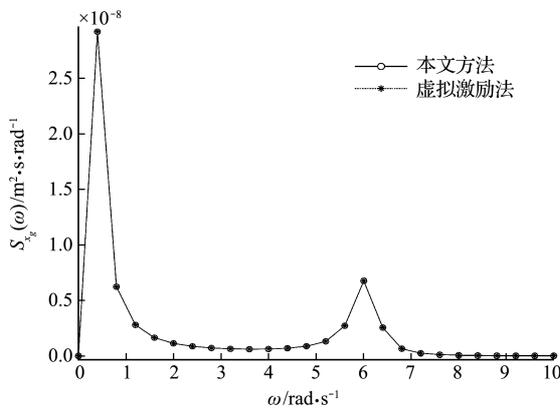


图2 1层位移功率谱对比

Fig. 2 Contrast diagram of PSDF of 1<sup>st</sup>-layer displacement

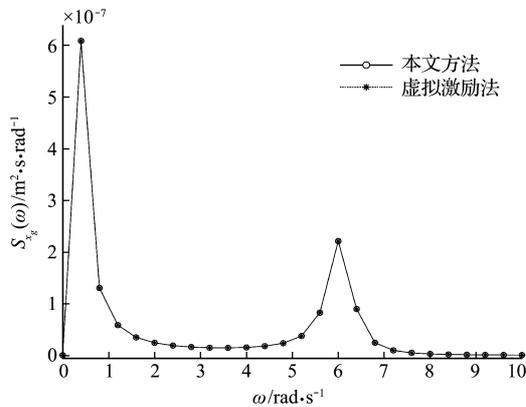


图3 10层位移功率谱对比

Fig. 3 Contrast diagram of PSDF of 10<sup>th</sup>-layer displacement

### 5.3 谱矩分析

#### 5.3.1 积分区间对虚拟激励法精度的影响分析

虚拟激励法的积分区间分别取 $[0, 5]$  rad/s,  $[0, 25]$  rad/s 和  $[0, 100]$  rad/s, 而积分步长统一取  $0.01$  rad/s, 计算结构各层位移及层间位移的谱矩并与本文方法进行对比, 如图 4~图 10 所示。可以看出, 随着积分步长的增加, 虚拟激励法所得结果逼近本文方法, 从而说明本文方法所得封闭解的正确性。

从图 4 和图 8 可以看出, 对于 0 阶谱矩, 虚拟

激励法的积分区间取 $[0, 5]$  rad/s 可达到很高的精度; 从图 5~图 7、图 9 和图 10 可以看出, 对结构响应 1 阶和 2 阶谱矩及加速度方差, 虚拟激励法的积分区间取 $[0, 25]$  rad/s 可达到很高的精度。由此可知, 虚拟激励法分析不同阶谱矩时要想达到高精度, 必须试算积分区间。

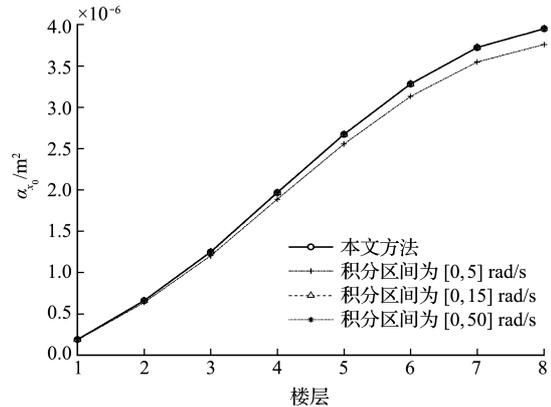


图4 位移 0 阶谱矩区间对比

Fig. 4 Diagram of 0-order spectral moment of interval displacements

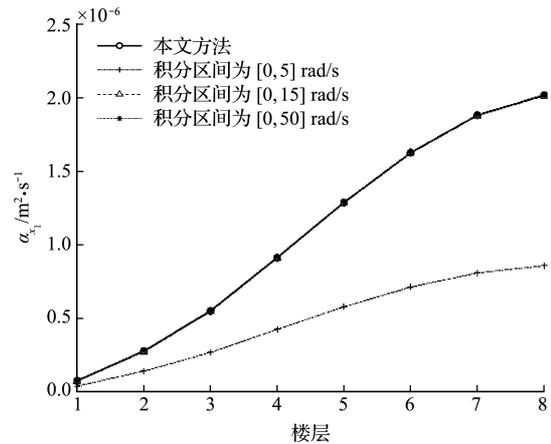


图5 位移 1 阶谱矩区间对比

Fig. 5 Diagram of 1-order spectral moment of interval displacements

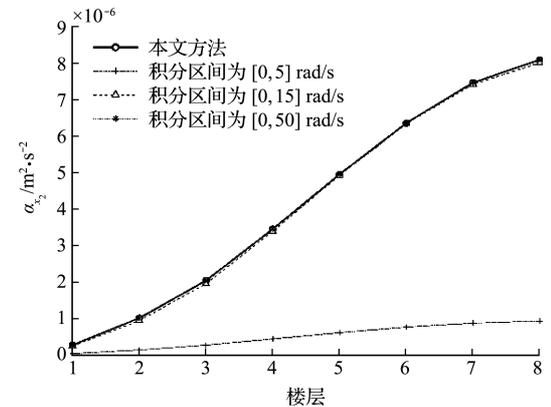


图6 位移 2 阶谱矩区间对比

Fig. 6 Diagram of 2-order spectral moment of interval displacements

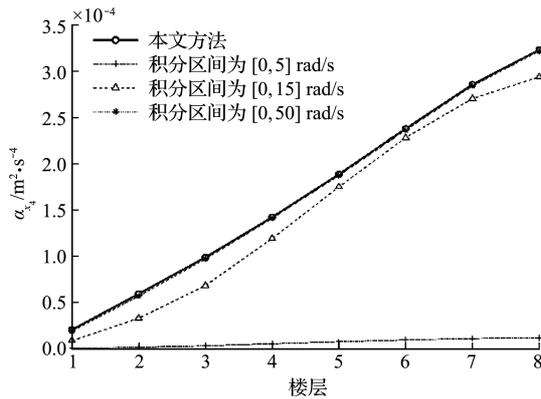


图 7 加速度方差区间对比

Fig. 7 Diagram of variance of absolute accelerations

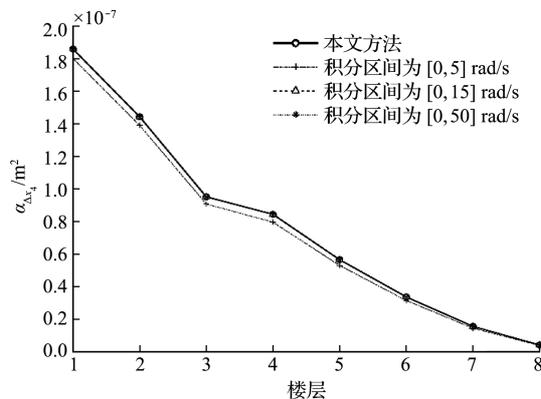


图 8 层间位移 0 阶谱矩区间对比

Fig. 8 Diagram of 0-order spectral moment of interval displacements

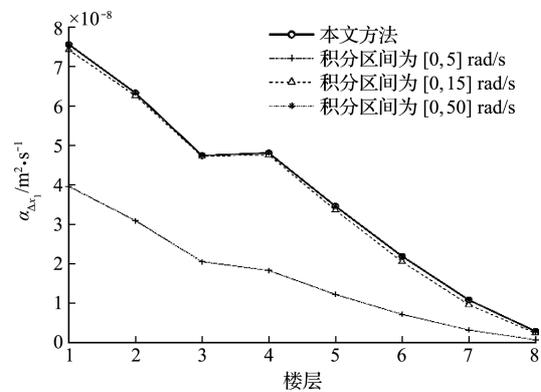


图 9 层间位移 1 阶谱矩区间对比

Fig. 9 Diagram of 1-order spectral moment of interlayer displacements

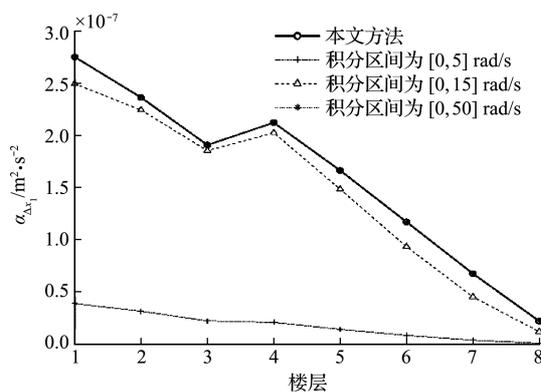


图 10 层间位移 2 阶谱矩区间对比

Fig. 10 Diagram of 2-order spectral moment of interlayer displacements

### 5.3.2 积分步长对虚拟激励法的影响

根据 5.3.1 的分析可得,当积分区间为 $[0,100]$ 时,虚拟激励法与本文方法在计算谱矩时完全吻合。为了分析虚拟激励法积分步长对其精度的影响,分别取 3 种积分步长,1 rad/s,0.25 rad/s 和 0.01 rad/s。图 11~图 17 为不同积分步长下虚拟激励法分析谱矩与本文方法的对比。可以看出,积分步长越小,计算的谱矩与本文方法越接近,故可证明本文方法的正确性。

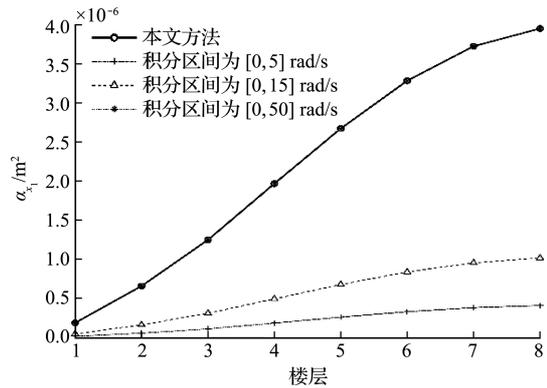


图 11 位移 0 阶谱矩对比

Fig. 11 Diagram of 0-order spectral moment of displacements

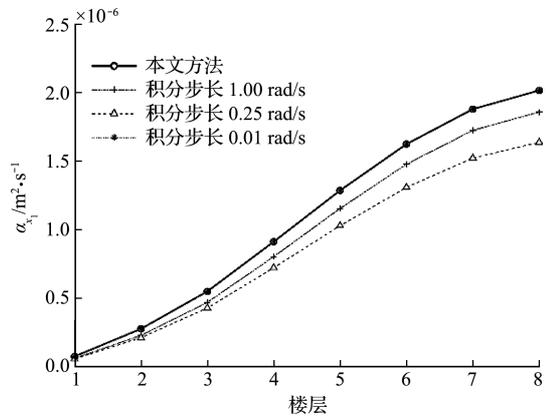


图 12 位移 1 阶谱矩对比

Fig. 12 Diagram of 1-order spectral moment of displacements

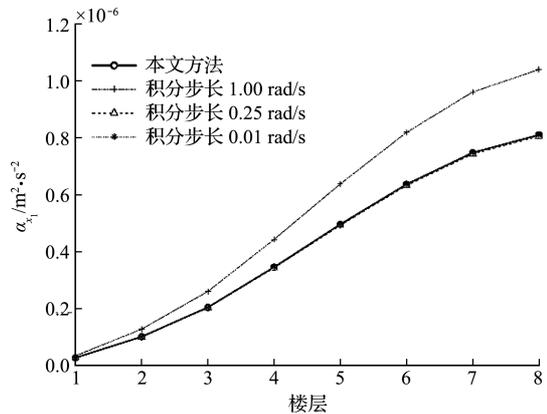


图 13 位移 2 阶谱矩对比

Fig. 13 Diagram of 2-order spectral moment of displacements

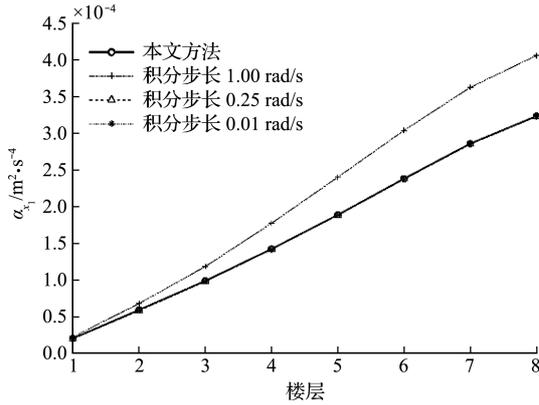


图 14 加速度方差对比

Fig. 14 Diagram of variance of absolute accelerations

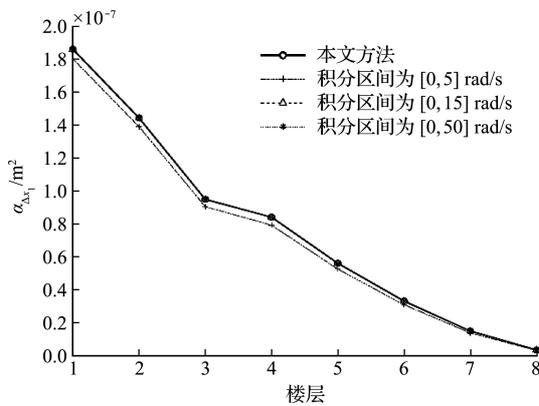


图 15 层间位移 0 阶谱矩对比

Fig. 15 Diagram of 0-order spectral moment of interlayer displacements

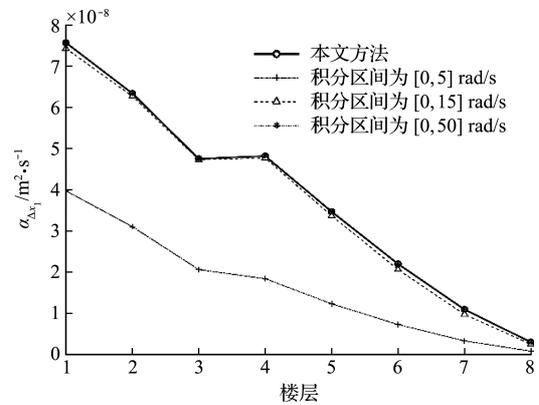


图 16 层间位移 1 阶谱矩对比

Fig. 16 Diagram of 1-order spectral moment of interlayer displacements

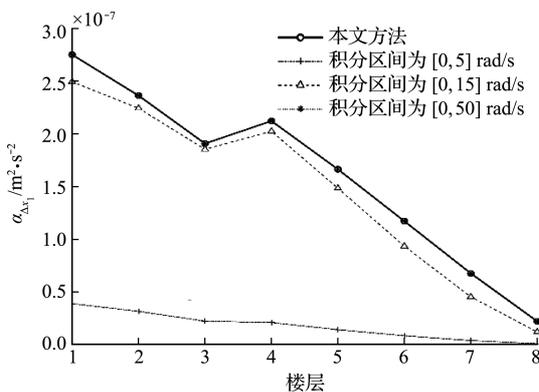


图 17 层间位移 2 阶谱矩对比

Fig. 17 Diagram of 2-order spectral moment of interlayer displacements

## 6 结论

本文研究了基于巴斯金谱的建筑结构顺风向振动的系列响应 0~2 阶谱矩及加速度方差的简明封闭解,获得如下结论。

(1) 利用留数定律获得整数指数表示的巴斯金谱的二次正交式,其为获得基于巴斯金谱描述的各类随机激励下结构响应简明封闭解的关键所在。

(2) 利用复模态法和虚拟激励法将线性结构的频率响应函数进行二次正交化,即将结构的频率响应函数表示为结构振动特征值及圆频率变量平方和倒数的线性组合,与巴斯金谱的二次正交式相乘即为结构响应功率谱的二次正交式,为获得结构系列响应 0~2 阶谱矩及加速度方差的简明封闭解奠定基础。

(3) 利用本文方法可以方便获得结构位移、结构位移变化率、层间位移和层间位移变化率的统一显示简明表达式,便于工程应用。

(4) 将本文所提封闭解与虚拟激励法进行对比分析,验证了本文方法的正确性,同时也说明了虚拟激励法在分析谱矩时的精度受积分步长和积分区间影响较大,需通过多次试算才能找到精度高的解。

## 附录 A 动力响应功率谱的推导

对本文式(20)进行整理,

$$S_{D_l}(\omega) = \sum_{k=1}^{2m} \mu_k A_k + \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=k+1}^{2m} \mu_{i,k} B_{i,k} \quad (\text{A-1})$$

式中 
$$\mu_k = \sum_{s_2=1}^m \sum_{s_1=1}^m \varphi_{l,s_1} \varphi_{l,s_2} \bar{U}_{s_1,k} \bar{U}_{s_2,k} \quad (\text{A-2a})$$

$$\mu_{i,k} = \sum_{s_2=1}^m \sum_{s_1=1}^m \varphi_{l,s_1} \varphi_{l,s_2} \bar{U}_{s_1,k} \bar{U}_{s_2,i} \quad (\text{A-2b})$$

$$A_k = z_k z_k^* \quad (\text{A-2c})$$

$$B_{i,k} = z_i z_k^* + z_k z_i^* \quad (\text{A-2d})$$

将式(17)代入式(A-2c),

$$A_k = \frac{1}{p_k + j\omega} \sqrt{S_u(\omega)} e^{j\omega t} \times \sum_{i_1=1}^n \eta_{k,i_1} I_0(H_{i_1}) B(H_{i_1}) \frac{1}{p_k - j\omega} \times \sqrt{S_u(\omega)} e^{-j\omega t} \sum_{i_2=1}^n \eta_{k,i_2} I_0(H_{i_2}) B(H_{i_2}) \quad (\text{A-3})$$

利用式(7),式(A-3)简化为

$$A_k = S_u(\omega) \lambda_k \left( \frac{1}{p_k + j\omega} \frac{1}{p_k - j\omega} \right) \quad (A-4)$$

$$\lambda_k = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \eta_{k,i_1} \eta_{k,i_2} \rho_{i_1 i_2} \quad (A-5)$$

将式(17)代入式(A-2d)得

$$B_{ik} = z_k z_i^* + z_k^* z_i = \frac{1}{p_k + j\omega} \frac{1}{p_i - j\omega} S_u(\omega) \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \eta_{i,i_1} \times \eta_{k,i_2} I_0(H_{i_1}) I_0(H_{i_2}) B(H_{i_1}) B(H_{i_2}) + \frac{1}{p_k - j\omega} \frac{1}{p_i + j\omega} S_u(\omega) \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \eta_{i,i_1} \times \eta_{k,i_2} I_0(H_{i_1}) I_0(H_{i_2}) B(H_{i_1}) B(H_{i_2}) \quad (A-6)$$

由式(8),式(A-6)改写为

$$B_{ik} = S_u(\omega) \lambda_{ik} \left[ \frac{1}{p_i + j\omega} \frac{1}{p_k - j\omega} + \frac{1}{p_i - j\omega} \frac{1}{p_k + j\omega} \right] \quad (A-7)$$

$$\lambda_{ik} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \eta_{i,i_1} \eta_{k,i_2} \rho_{i_1 i_2} \quad (A-8)$$

针对式(A-7)的以下部分进行简化,

$$\frac{1}{p_i + j\omega} \frac{1}{p_k - j\omega} + \frac{1}{p_i - j\omega} \frac{1}{p_k + j\omega} = \frac{1}{p_i + p_k} \left( \frac{2p_i}{p_i^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \quad (A-9)$$

将式(A-9)代入式(A-7)得

$$B_{ik} = \frac{\lambda_{ik} S_u(\omega)}{p_i + p_k} \left( \frac{2p_i}{p_i^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \quad (A-10)$$

将式(A-4, A-10)代入式(A-1),则结构脉动风压力的动力响应的功率谱为

$$S_{D_l}(\omega) = G_{D_l}(\omega) \cdot S_u(\omega) \quad (A-11)$$

$$\text{式中 } G_{D_l}(\omega) = \sum_{k=1}^{2m} \frac{\mu_k \lambda_k}{p_k^2 + \omega^2} + \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=k+1}^{2m} \frac{\mu_{ik} \lambda_{ik}}{p_i + p_k} \times \left( \frac{2p_i}{p_i^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \quad (A-12)$$

由式(A-12)可知,  $G_{D_l}(\omega)$  与风荷载无关,仅与结构系统的复振动特征值有关。

### 附录 B $\chi_{p_k, q}(q=0, 1, 2)$ 的推导

$$\chi_{p_k, 0} = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{\bar{\alpha}_r}{\omega^2 + \bar{\beta}_r} \frac{1}{p_k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{p_k^2 - \bar{\beta}_r} \left[ \frac{1}{\sqrt{\bar{\beta}_r}} \arctan \frac{\omega}{\sqrt{\bar{\beta}_r}} - \frac{1}{p_k} \arctan \frac{\omega}{p_k} \right] \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{p_k^2 - \bar{\beta}_r} \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{\beta}_r}} - \frac{1}{p_k} \right) \quad (B-1)$$

$$\chi_{p_k, 1} = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{\bar{\alpha}_r \omega}{\omega^2 + \bar{\beta}_r} \frac{1}{p_k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{2} \frac{1}{p_k^2 - \bar{\beta}_r} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\mu + \bar{\beta}_r} - \frac{1}{p_k^2 + \mu} \right) d\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\alpha}_r}{2} \frac{1}{p_k^2 - \bar{\beta}_r} (\ln p_k^2 - \ln \bar{\beta}_r) \quad (B-2)$$

$$\chi_{p_k, 2} = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \int_0^\infty \frac{\bar{\alpha}_p \omega^2}{\omega^2 + \bar{\beta}_p} \frac{1}{p_k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \bar{\alpha}_p \int_0^\infty \frac{\omega^2 + \bar{\beta}_p - \bar{\beta}_p}{\omega^2 + \bar{\beta}_p} \frac{1}{p_k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^2 \left( \frac{\bar{\alpha}_p \pi}{2 p_k} - \bar{\beta}_p \chi_{p_k, 0} \right) \quad (B-3)$$

### 参考文献(References):

[1] 陈政清. 工程结构的风致振动、稳定与控制[M]. 北京:科学出版社,2013. (CHEN Zheng-qing. *Wind Induced Vibration, Stability and Control of Engineering Structures*[M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))

[2] 李桂青,曹 宏,李秋胜,等. 结构动力可靠性理论及其应用[M]. 北京:地震出版社,1993. (LI Gui-qing, CAO Hong, LI Qiu-sheng, et al. *Structural Dynamic Reliability Theory and Its Application*[M]. Beijing: Seismological Press, 1993. (in Chinese))

[3] 瞿伟廉. 高层建筑及高耸结构的风振控制设计[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1991. (QU Wei-lian. *Wind Induced Vibration Control Design of Tall Buildings and Tall Structures*[M]. Wuhan: Wuhan University of Surveying and Mapping Press, 1991. (in Chinese))

[4] 吕 蒙,段忠东. 基于卷积非粘滞阻尼模型的超高层结构风效应分析[J]. 计算力学学报,2017, 34(6): 763-769. (LÜ Meng, DUAN Zhong-dong. Wind effect analysis of super-high structure based on convolutional non-viscously damped system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, 34(6): 763-769. (in Chinese))

[5] 史 媛. 桥塔施工期 TMD 控制系统设计及风洞试验研究[D]. 大连理工大学,2015. (SHI Yuan. *The Design of the TMD and the Research of Wind Tunnel During the Construction of Bridge Tower*[D]. Dalian University of Technology, 2015. (in Chinese))

[6] 王肇民,李宇明,罗 烈,等. 上海电视塔用 TMD 进行结构风振控制的风洞试验研究[J]. 特种结构, 1994, 11(3): 14-17. (WANG Zhao-min, LI Yu-ming, LUO Lie, et al. The tunnel research on wind-induced

- vibration control of Shanghai TV Tower by using TMD [J]. *Special Structures*, 1994, **11**(3):14-17. (in Chinese))
- [7] 李创第,葛新广,朱倍权.带五种被动减振器的高层建筑基于 Davenport 谱随机风振响应的解析解法[J]. *工程力学*, 2009, **26**(4):144-152. (LI Chuang-di, GE Xin-guang, ZHU Bei-quan. Exact analytic method for random wind-induced response of tall building structures with five sorts of passive dampers on the basis of Davenport spectrum [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(4):144-152. (in Chinese))
- [8] 张文首,于 骁,岳前进.受控结构风振响应分析的广义虚拟激励法(英文)[J]. *计算力学学报*, 2005, **22**(1):20-24. (ZHANG Wen-shou, YU Xiao, YUE Qian-jin. Generalized pseudo-excitation method for wind-excited buildings with control devices[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(1):20-24. (in English))
- [9] 赵中伟,张永高.基于本征-虚拟激励法的大跨钢结构风振响应分析[J]. *空间结构*, 2020, **26**(1):15-23. (ZHAO Zhong-wei, ZHANG Yong-gao. Wind-induced response analysis of complex steel structures based on pod-pseudo excitation method [J]. *Spatial Structures*, 2020, **26**(1):15-23. (in Chinese))
- [10] 李 瞰,张梦丹,姜 琰,等.基于近似 Davenport 风速谱的建筑结构动力响应的新封闭解法[J]. *广西科技大学学报*, 2020, **31**(4):1-10, 18. (LI Tun, ZHANG Meng-dan, JIANG Yan, et al. A new closed solution to the dynamic response of building structures based on approximate Davenport wind speed spectrum [J]. *Journal of Guangxi University of Science and Technology*, 2020, **31**(4):1-10, 18. (in Chinese))
- [11] Davenport A G. The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds[J]. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 1961, **87**(372):194-211.
- [12] Simiu E, Filliben J J. Probability distributions of extreme wind speeds[J]. *Journal of the Structural Division*, 1976, **102**(9):1861-1877.
- [13] 李创第,王磊石,邹万杰,等.广义 Maxwell 阻尼器高层结构随机风振响应解析法[J]. *广西大学学报(自然科学版)*, 2016, **41**(4):953-963. (LI Chuang-di, WANG Lei-shi, ZOU Wan-jie, et al. Analytic method for random wind-induced response of high-rise structure with general Maxwell dampers[J]. *Journal of Guangxi University(Natural Science Edition)*, 2016, **41**(4):953-963. (in Chinese))
- [14] Zhang W S, Xu Y L. Closed form solution for along-wind response of actively controlled tall buildings with LQG controllers [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2001, **89**(9):785-807.
- [15] Vanmarcke E H. On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, **42**(1):215-220.
- [16] 俞 水,汪忠来.基于首次穿越时间概率密度的时变可靠性分析[J]. *计算力学学报*, 2020, **37**(3):300-306. (YU Shui, WANG Zhong-lai. Time-dependent reliability analysis based on probability density of first-passage time point[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(3):300-306. (in Chinese))
- [17] 周玲君,韩 静,狄艳媚.复变函数与积分变换[M]. 上海:同济大学出版社, 2017. (ZHOU Ling-jun, HAN Jing, DI Yan-mei. *Complex Function and Integral Transformation*[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2017. (in Chinese))
- [18] 方 同.工程随机振动[M]. 北京:国防工业出版社, 1995. (FANG Tong. *Engineering Random Vibration* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995. (in Chinese))
- [19] 林家浩,张亚辉,赵 岩.虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(1):1-32. (LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui, ZHAO Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1):1-32. (in Chinese))
- [20] 卢 雷,雷远德,郁银泉,等.大跨度钢桁架屋盖下悬吊结构楼层舒适度研究[J]. *建筑结构*, 2016, **46**(19):51-56. (LU Lei, LEI Yuan-de, YU Yin-quan, et al. Study on human comfort of suspended floor under large-span steel truss roof [J]. *Building Structure*, 2016, **46**(19):51-56. (in Chinese))
- [21] 宋永发,常金鹏,王延龙.高层建筑的顺风向风振响应分析及舒适度研究[J]. *防灾减灾工程学报*, 2007, **27**(4):484-487. (SONG Yong-fa, CHANG Jin-peng, WANG Yan-long. Analyses of along-wind loading response of tall buildings and degree of comfortable feeling[J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2007, **27**(4):484-487. (in Chinese))

## Concise closed-form solutions of random wind-induced vibration response of building structure based on Baskin wind speed spectrum

LI Tun<sup>1</sup>, ZHANG Meng-dan<sup>1</sup>, JIANG Yan<sup>1</sup>, GE Xin-guang<sup>\*1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering & Architecture, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China

2. School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the expression of the along-wind vibration response of a building structure excited by Baskin wind speed spectrum is complex, a concise closed-form solution is proposed. Baskin spectrum is widely used to describe various random excitations such as fluctuating wind, random ground motion and road surface irregularity. Based on the residue theorem, the quadratic orthogonal formula of Baskin wind spectrum is given. By using the complex mode method and the pseudo excitation method, the unified quadratic orthogonal expressions of the power spectrum density function of the series response (absolute displacement, inter-story displacement and their change rates) of the building structure is obtained. According to the definition of the spectral moment, the concise closed-form solutions of the variance and spectral moments of the series response and the acceleration variance of the structural floor are obtained. This method is used to analyze an 8-storey building structure and is compared with the traditional pseudo excitation method. The results show that the closed-form solutions obtained in this paper is correct and can be used to verify the accuracy and efficiency of the pseudo excitation method in spectral moment and variance analysis. Since the complex modal method is included in this method, it can be used for stochastic response analysis based on Baskin spectrum and dynamic optimization analysis based on dynamic reliability and comfort of various linear structures.

**Key words:** Baskin wind spectrum; quadratic orthogonal expressions of the power spectrum density function; spectral moments; variance; concise closed-form solution

---

引用本文/Cite this paper:

李 瞰,张梦丹,姜 琰,等. 建筑结构基于巴斯金风速谱的系列风振响应的简明封闭解[J]. 计算力学学报,2021,38(6):739-747.

LI Tun,ZHANG Meng-dan,JIANG Yan, et al. Concise closed-form solutions of random wind-induced vibration response of building structure based on Baskin wind speed spectrum[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2021,38(6):739-747.