DOI:10.7511/jslx20201206001

不确定结构时域响应分析的多项式维数分解法

赵　岩*，　刘　凡，　孙晓旭

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室 工程力学系,大连 116024)

摘　要:针对具有不确定参数结构,提出时域不确定性传播和量化的多项式维数分解法,确定了结构响应统计量的演变过程。首先,采用参数概率模型来描述结构参数的不确定性,建立结构动力学方程,将结构响应表达为不确定参数的函数;进一步,将所关心的结构响应采用成员函数进行维数分解,并利用正交多项式基底对成员函数进行Fourier展开;最后,应用降维积分方法进行展开系数的求解,给出了响应均值和标准差的计算表达式。在数值算例中,将本文方法与蒙特卡洛方法进行对比,结果表明所建立方法具有较高的求解效率和计算精度。

关键词:不确定性量化;多项式维数分解;正交多项式;降维积分

中图分类号:O321　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1007-4708(2021)06-0722-07

1　引　言

不确定性因素广泛存在于各工程领域,通常应用的确定性模型只是实际结构的一种近似模型化方式,以确定性分析严格作为结构设计标准将会带来一定的风险。采用随机结构模型是实际结构更为合理的模型化方法,目前,考虑不确定性因素在结构中的传播及合理度量不确定性因素对结构响应的影响已经成为动力学研究的重要课题[1-3]。

在关于不确定性分析的研究工作中,最早应用的摄动技术是比较流行的方法,在实际应用中通常采用二阶截断展开,对于更高阶情形的求解将会变得非常复杂。此外,摄动法一般只适用于小尺度变异的随机问题,成为其固有的缺陷[4]。吴锋等[5]提出了快速摄动法,较好地解决了摄动法的复杂展开计算问题。蒙特卡洛方法MC(Monte Carlo method)是处理不确定动力学问题的另一种有效方法,其基于样本分析的策略能够有效应用于线性和非线性问题等各研究领域[6,7];其较为明显的不足之处在于收敛效率问题,为了得到可靠的计算结果,需要较高的样本数量[4]。目前,针对小样本的MC方法成为研究的一个主要方向[8,9]。

对于不确定结构动力学,谱随机方法植根于概率和测度空间的丰富数学基础之中,近年来成为处理不确定问题的重要手段。Cameron-Martin定理指出,在L_2空间中任意二阶随机过程可以由正交多项式序列予以均方逼近,成为谱随机方法的核心出发点。基于多项式逼近的Galerkin映射方法成功应用于动力学问题分析。由于需要求解的方程组规模远大于原始随机问题,当涉及随机因素较多时,矩阵维度会显著增加,该方法只能用于简单的分析模型[10,11]。维数分解法[12,13]采用一组变量维数逐次增加的成员函数对原高维随机函数进行分解,是一种有限、分层且收敛的展开,实现了降维目的。之后,Rahman将成员函数进行Fourier展开,提出了多项式维数分解法,即PDD(Polynomial dimensional decomposition)方法[14]。该方法给出了原随机函数关于随机变量的简单映射关系,能够根据展开系数快速求得原随机函数的统计矩,已广泛应用于灵敏度分析[15]、不确定性设计[16]和随机动力系统频域稳态分析[17]等,显示出良好的应用前景。

本文将上述PDD方法推广用于不确定结构的时域响应分析,采用参数概率模型来描述不确定性,建立随机结构动力学方程。将结构不确定时域响应表达为不确定参数的函数,进一步将关心的不确定时域响应进行维数分解,并利用正交多项式进行Fourier展开。采用降维积分方法进行展开系数的计算,并最终进行不确定结构响应统计量随时间演变过程的分析。数值算例中,通过具有解析解的不确定单自由度动力响应分析验证所提出方法的正确性,进而采用具有不确定参数的多自由度桁架结构进行了方法的一般性应用,并同MC方法

收稿日期:2020-12-06;**修改稿收到日期**:2021-01-10.
基金项目:国家自然科学基金(11772084;U1906233);国家重点研发计划(2017YFC0307203);山东省重点研发计划(2019JZZY010801)资助项目.
作者简介:赵　岩*(1974-),男,博士,教授(E-mail:yzhao@dlut.edu.cn).

进行对比，验证所建立方法的有效性。

2　具有不确定参数结构的运动方程

在实际的工程结构中，由于不确定的材料物理参数和不可避免的加工制造误差等广泛存在的不确定性，使得结构的刚度和质量等参数也具有不确定性。假定结构中所有的不确定参数均为服从特定概率密度分布的独立随机变量，并假定外荷载与结构的不确定参数相互独立。此时，具有不确定参数结构在外荷载作用下的运动方程可表示为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{\xi}$ 为由结构 N 个不确定参数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 构成的向量，$\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})$，$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ 和 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})$ 分别为结构的随机质量、随机阻尼和随机刚度矩阵；$\boldsymbol{x}(t)$，$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ 分别为结构的位移、速度和加速度向量；$\boldsymbol{F}(t)$ 为外荷载向量。

在荷载作用下，具有不确定参数结构的响应也会成为关于结构不确定参数的函数。假定结构不确定参数的联合概率密度函数为 $f_\xi(\boldsymbol{\xi})=\prod_{i=1}^{i=N} f_\xi(\xi_i)$，将式(1)的结构响应表达为关于结构不确定参数的函数

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})=\mathbf{G}(t,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N) \tag{2}$$

由于结构中存在不确定参数，使得结构的时域响应向量 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ 的每一个元素在任意时间 t 处都是关于不确定参数 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数。对于大型复杂结构而言，往往只关心结构部分节点的响应，假设 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 是 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ 的某一个观测自由度，将其表示为关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数

$$x(t,\boldsymbol{\xi})=g(t,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N) \tag{3}$$

本文利用 PDD 方法对式(3)的结构响应函数在每个时间步处进行维数分解和 Fourier 展开，进一步利用展开系数计算得到结构响应的均值和标准差。

3　时域响应分析的 PDD 方法

3.1　多项式维数分解法

将结构时域响应 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 进行维数分解并取 P 元近似，可表示为[14]

$$\tilde{x}_P(t,\boldsymbol{\xi})=x_0(t)+\sum_{d=1}^{P}\sum_{i_1=1}^{N-d+1}\cdots\sum_{i_d=i_{d-1}+1}^{N}x_{i_1\cdots i_d}(t,\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_d}) \tag{4}$$

式(4)可视为对多元随机函数 $x(t,\boldsymbol{\xi})$，采用一组变量维数逐次增加的成员函数进行分层近似，且这种分层近似在每一时间步 t 内进行。在式(4)中

$$x_0(t)=\int_{A^N}x(t,\boldsymbol{\xi})f_\xi(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5}$$

是确定性时间函数，其中 A^N 表示 N 维积分；$x_i(t,\xi_i)$ 表示单个变量 ξ_i 输入时对 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的影响；$x_{i_1i_2}(t,\xi_{i_1},\xi_{i_2})$ 表示两个变量 ξ_{i_1} 和 ξ_{i_2} 同时输入时对 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的影响；$x_{i_1\cdots i_P}(t,\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_P})$ 表示 P 个变量 $\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_P}$ 同时输入时对 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的影响。选择不同的 P 值可以得到不同阶次的近似，特别地，当 $P=N$ 时，$\tilde{x}_P(t,\boldsymbol{\xi})$ 收敛于 $x(t,\boldsymbol{\xi})$。

将式(4)的成员函数进行 Fourier 展开，并取前 m 阶截断，将其表示为展开系数与正交多项式基底的乘积形式

$$x_{i_1\cdots i_P}(t,\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_P})\approx\sum_{j_1=1}^{m}\cdots\sum_{j_P=1}^{m}C_{i_1\cdots i_Pj_1\cdots j_P}(t)\times\prod_{q=1}^{P}\Psi_{j_q}(\xi_{i_q}) \tag{6}$$

式中　P 取 1,2,3 时分别对应一元、二元和三元展开系数。式(6)的展开系数可按式(7)计算

$$C_{i_1\cdots i_Pj_1\cdots j_P}(t)=\int_{A^N}x(t,\boldsymbol{\xi})\prod_{q=1}^{P}\Psi_{j_q}(\xi_{i_q})f_\xi(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{7}$$

式中　$\Psi_j(\xi_i)$ 表示第 i 个随机变量 ξ_i 的第 j 阶正交多项式基底，关于展开系数和正交多项式基底的内容可参见文献[14]。利用式(6)的 Fourier 展开后，可将原来没有显示映射关系的成员函数近似表达为简单的函数映射关系，再根据式(4)，便能够得到结构响应函数 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的显式函数映射关系。

在对结构时域响应进行维数分解和 Fourier 展开后，响应的均值和方差可按式(8,9)计算[18]。

$$E[x(t,\boldsymbol{\xi})]=x_0(t) \tag{8}$$

$$E[x(t,\boldsymbol{\xi})-x_0(t)]^2=\sum_{d=1}^{P}\sum_{i_1=1}^{N-d+1}\cdots\sum_{i_d=i_{d-1}+1}^{N}\sum_{j_1=1}^{m}\cdots\sum_{j_d=1}^{m}[C_{i_1\cdots i_Pj_1\cdots j_P}(t)]^2 \tag{9}$$

相应地，可由式(9)得到结构时域响应标准差 SD (Standard deviation)的计算公式。

3.2　降维积分方法

在计算式(5)的 $x_0(t)$ 和式(7)的 $C_{i_1\cdots i_Pj_1\cdots j_P}(t)$ 时，需要进行 N 维积分，当随机变量维数较大时，计算成本高昂，对此本文采用降维积分方法[14]。令 $\mathbf{c}=\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}^{\mathrm{T}}$ 为随机变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的均值，将 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的 $N-(R-q)$ 个随机变量用 $\mathbf{c}$ 相对应的均值代替，得到 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的 $R-q$ 阶近似为

$$x_{R-q}(t,\boldsymbol{\xi})=x(t,c_1,c_2,\cdots,c_{q_1-1},\xi_{q_1},c_{q_1+1},\cdots,c_{q_{R-q}-1},\xi_{q_{R-q}},c_{q_{R-q}+1},\cdots,c_N) \tag{10}$$

此处，$P \leqslant R \leqslant N(q=0,1,\cdots,R)$。如当 $R=1$ 时，0 维分量函数(对应 $q=1$)对于给定的时间 t 是一个常量 $x(t,\mathbf{c})$，一维分量函数(对应 $q=0$)对于给定的时间 t 是 N 个一元函数 $x(t,\xi_1,c_2,\cdots,c_N)$，$x(t,c_1,\xi_2,c_3,\cdots,c_N),\cdots,\ x(t,c_1,c_2,\cdots,c_{N-1},\xi_N)$。定义函数 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 的 R 元近似

$$\hat{x}_R(t,\boldsymbol{\xi})=\sum_{q=0}^{R}(-1)^q\begin{pmatrix}N-R+q-1\\q\end{pmatrix}\times \sum_{q_1=1}^{N-(R-q)+1}\cdots\sum_{q_{R-q}=q_{R-q-1}+1}^{N}x_{R-q}(t,\boldsymbol{\xi}) \quad (11)$$

将式(5,7)的 $x(t,\boldsymbol{\xi})$ 用式(11)的 $\hat{x}_R(t,\boldsymbol{\xi})$ 代替，便可得到 $x_0(t)$ 和 $C_{i_1\cdots i_P j_1\cdots j_P}(t)$ 的近似表达。显然，采用降维积分方法后，原来所需的 N 维积分转化为最高 R 维积分。当 $R \ll N$ 时，计算效率将显著提高。

3.3 计算量分析

对于具有 N 个不确定参数的结构，采用 P 个变量近似的 PDD 方法进行时域分析计算结构响应均值和标准差时，需要在每个时间步 t 处计算展开系数 $x_0(t)$ 以及 $C_{i_1\cdots i_P j_1\cdots j_P}(t)$。当采用最高 R 维的降维积分以及 p 节点的高斯数值积分计算这些展开系数时，需要最多 $\sum_{k=0}^{k=R}\begin{pmatrix}N\\R-k\end{pmatrix}p^{R-k}$ 次的时域响应分析。当积分节点数目 p 为奇数时，每个变量的积分节点中包含有零点，可以采用更低一维的分量函数值，而不需要在为零的积分节点处进行时域响应分析，此时所需最高次数的时域响应分析次数减少为 $\sum_{k=0}^{k=R}\begin{pmatrix}N\\R-k\end{pmatrix}(p-1)^{R-k}$。

4 数值算例

给出 2 个数值算例，分别为具有不确定参数的单自由度系统和 10 杆桁架结构，用于验证本文提出的 PDD 方法的精确性和计算效率。在单自由度系统算例中，系统仅含有 1 个不确定参数，主要用于研究 PDD 方法中多项式基底数目对标准差计算精度的影响。在 10 杆桁架算例中，结构中存在 12 个不确定参数，主要用于研究不同 R 值对均值的影响，以及研究不同 R,P 和 m 值对标准差计算精度的影响。算例 1 中，解析解和 MC 模拟结果将作为 PDD 方法计算结果的参照。算例 2 中，MC 模拟结果将作为 PDD 方法计算结果的参照。

4.1 单自由度系统

单自由度无阻尼系统的自由振动方程可表示为[1]

$$\ddot{X}+\omega^2X=0 \quad (12)$$

初始条件为 $X(t)|_{t=0}=x_0,\dot{X}(t)|_{t=0}=\dot{x}_0$。

在该数值算例中，取 $x_0=0.1$ m，$\dot{x}_0=0$ m/s，且系统的圆频率 ω 为区间 $[5\pi/4,7\pi/4]$ 内的均匀分布随机变量。由动力学理论可知，在 $\dot{x}_0=0$ m/s 时，方程(12)具有解析解 $X(t)=x_0\cos(\omega t)$。

分别采用 MC 和 PDD 两种方法计算系统位移响应的均值和标准差，分析时间为 0 s～15 s，时间步长取 0.01 s。MC 方法的样本数量取 10^5，PDD 方法中多项式基底数目取 12，采用解析积分计算均值和展开系数。根据文献[1]给出的系统位移响应均值以及标准差的解析表达式计算得到的结果，作为本文 PDD 方法的参照。

图 1 给出了分别由 PDD 方法和 MC 方法计算得到的系统位移响应均值曲线，可以看出，PDD 方法计算得到的系统位移响应均值与解析解及 MC 模拟结果吻合良好。实际上，在该算例中只有一个随机变量，由 PDD 方法的展开系数计算式(5)可知，当采用解析积分时，PDD 方法计算得到的均值与解析解是完全一致的。值得注意的是，对于算例中的随机系统，其响应的均值呈现出衰减的趋势，当时间 $t\to\infty$ 时，响应的均值为 0。无阻尼确定参数系统的响应不会随时间衰减，这表明确定系统响应和不确定系统响应有显著不同[1]。

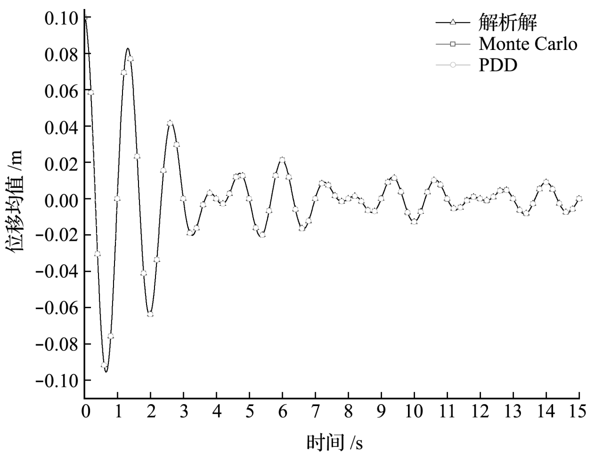

图 1 位移响应均值
Fig. 1 Mean of displacement response

图 2 给出了 PDD 方法和 MC 方法计算得到的系统位移响应标准差。可以看出，当基底数目很少时，PDD 方法计算得到的标准差在初始的一段时间里能够和 MC 模拟结果以及解析解相吻合，但随着时间的增大，吻合程度逐渐变差。当增加基底数目时，PDD 方法计算得到的标准差在更长的一

段时间内与 MC 模拟结果及解析解相吻合。由此可知，在 PDD 方法中可以通过增加基底数目以获取更加精确的计算结果。由系统响应均值和二阶原点矩的解析表达式可知，当 $t\to\infty$ 时，响应方差会逐渐收敛于稳定值，因此可以只计算相对足够长的一段时间内的标准差即可。在此算例中，PDD 方法取合适的基底数目（如 $m=12$）便足够，不需要取无穷多项。

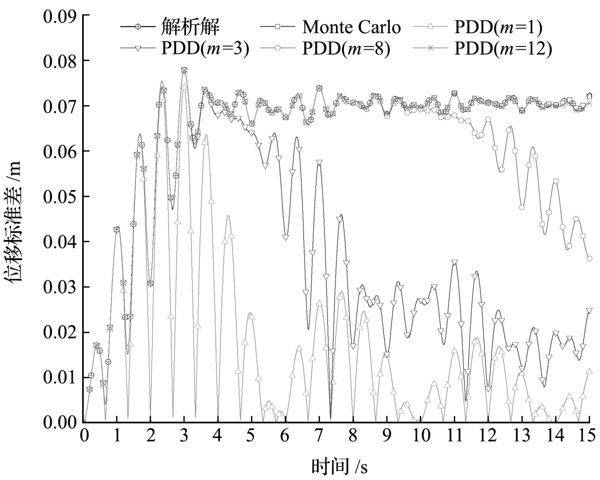

图 2　位移响应标准差

Fig. 2　SD of displacement response

4.2　10 杆桁架

由 10 根杆件组成的桁架结构，通过节点 1 和节点 4 与支座铰接，结构几何尺寸如图 3 所示。在节点 7 处作用有简谐荷载 $F(t)=F_0\sin(2\pi t)$，荷载的幅值 F_0 为服从对数正态分布的随机变量。此外，杆截面面积 $\widetilde{A}_i(i=1,2,\cdots,10)$ 和材料弹性模量 $\widetilde{E}$ 均为服从对数正态分布的独立随机变量，各参数列入表 1。不计杆件自重，在节点 2，3，5，6 和节点 7 处布置有附加质量 $\overline{M}=1000$ kg。桁架的阻尼矩阵采用 Rayleigh 阻尼确定，$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})=\alpha\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})+\beta\mathbf{K}(\boldsymbol{\xi})$，$\alpha=0.6184$，$\beta=4.4857\times10^{-4}$。该算例虽然采用了常用的 Rayleigh 阻尼，但 PDD 方法的适用范围并不受阻尼模式的影响，因为 PDD 方法在计算展开系数时进行的时域响应分析与 MC 方法以及确定参数结构的时域响应分析是一致的。分别采用 PDD 方法和 MC 方法（样本取10^4）计算桁架杆 3 轴向应力响应，时间 t 取 0 s～10 s，步长取 0.01 s。PDD 方法采用 3 节点的高斯数值积分，且所有对数正态分布随机变量在计算中均转换为正态分布的随机变量。在商用有限元软件 ANSYS 中建立桁架的有限元模型并进行时域分析。

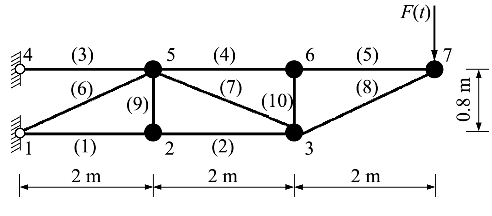

图 3　10 杆桁架

Fig. 3　10-bar truss

表 1　桁架随机变量参数

Tab. 1　Parameters of random variables of truss

$\widetilde{F}_0$		$\widetilde{A}_i$		$\widetilde{E}$	
$\overline{F}_0$/kN	$cov_{\widetilde{F}_0}$	$\overline{A}_i/mm^2$	$cov_{\widetilde{A}_i}$	$\overline{E}$/GPa	$cov_{\widetilde{E}}$
5	0.05	10^3	0.05	200	0.05

图 4 给出了采用 PDD 方法和 MC 方法计算得到的杆 3 轴向应力均值。可以看出，PDD 方法计算得到的结构响应均值曲线与 MC 方法结果吻合良好，即使取 $R=1$，也能得到与 MC 方法相吻合的结果，这表明 PDD 方法具有足够的精确性。

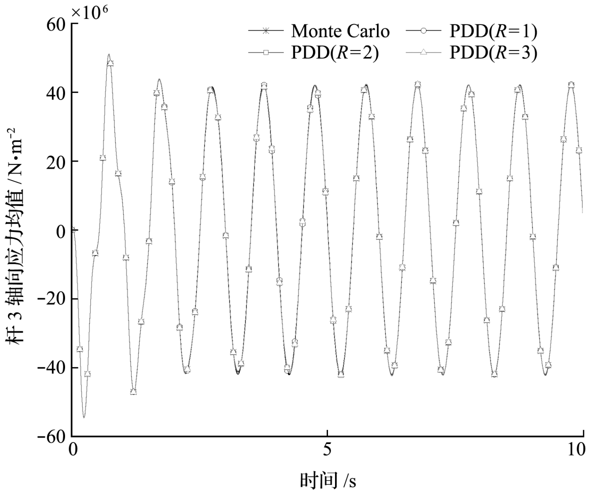

图 4　杆 3 轴向应力均值

Fig. 4　Mean of axial stress of member 3

图 5 给出了 PDD 方法和 MC 方法计算得到的结构响应标准差。在 PDD 方法中，P 分别取 1，2 和 3 用于对比不同 P 值对结构响应标准差的影响。可以看出，当 $P=1$ 时，PDD 方法计算得到的响应曲线与 MC 方法模拟结果稍有偏差，但随着 P 的增大，PDD 方法计算结果与 MC 方法结果吻合程度更好，表明在 PDD 方法中可以通过增大 P 的取值来提高计算精度。

图 6 和图 7 分别给出了 PDD 方法在不同 R 和 P 值（$R=P$）以及不同多项式基底数目 m时，计算得到的结构响应标准差与 MC 方法模拟结果的对比曲线。可以看出，在 PDD 方法中，增大 R，P 或 m 的值均能够提高计算精度。在该算例中，取 $R=$

$P=2$ 时便能够得到与 MC 方法非常吻合的计算结果。

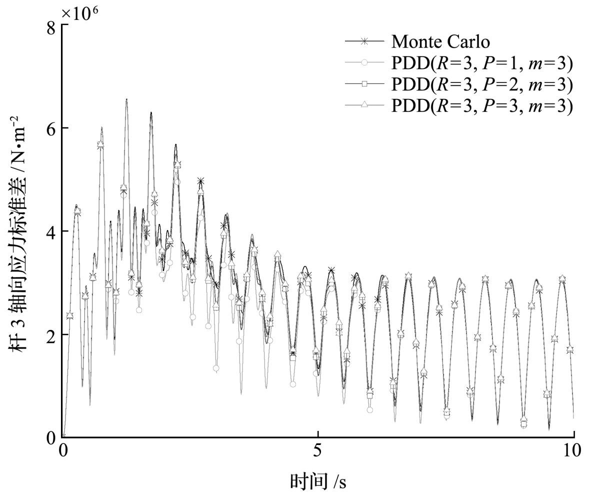

图 5　不同 P 值时的杆 3 轴向应力标准差
Fig. 5　SD of axial stress of member 3 with different values of P

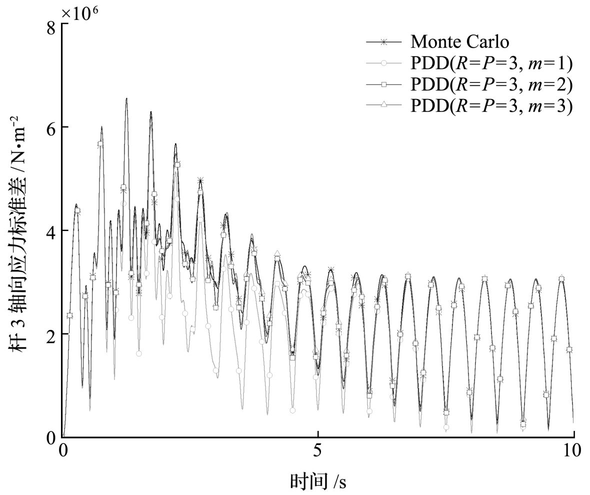

图 6　不同 m 值时的杆 3 轴向应力标准差
Fig. 6　SD of axial stress of member 3 with different values of m

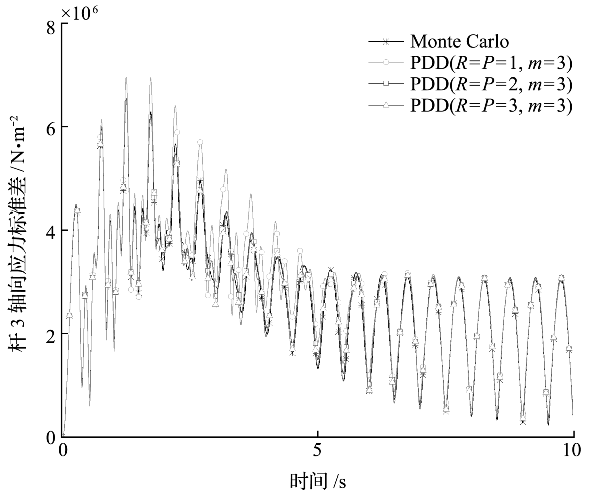

图 7　不同 R 值和 P 值时的杆 3 轴向应力标准差
Fig. 7　SD of axial stress of member 3 with different values of R and P

表 2 给出了 PDD 方法与 MC 方法所需的时域响应分析次数，由表中数据可知，PDD 方法所需时域响应分析次数远少于 MC 方法。虽然本文给出了 $R=P=3$ 的 PDD 方法计算结果，但实际上取 $R=P=2$ 时便有与 MC 方法相当的精度，而 PDD 方法所需的时域分析次数仅为 289 次，不到 MC 方法所需次数的 3%，采用 PDD 方法可节省大量的分析时间。对比 PDD 方法不同 R 和 P 值时的分析次数可知，随着降维积分变量数目的增加，动力学响应分析所需的次数也会增加，在应用 PDD 方法时，可以使 P 与 R 取相同的值，这样既能提高精度，且不会增加额外的计算量。

表 2　时域响应分析次数
Tab. 2　Numbers of time domain response analysis

方法	PDD 方法						MC 方法
	$P=1$			$P=2$		$P=3$	
	$R=1$	$R=2$	$R=3$	$R=2$	$R=3$	$R=3$	
次数	25	289	2049	289	2049	2049	10^4

PDD 方法中，在每个积分节点处进行的时域响应计算与确定参数结构的时域响应计算的基本原理是一致的，其计算精度和效率依赖于选取的时域积分方法和积分时间步长。常用的时域积分方法如 Newmark 法和精细积分法等在 PDD 方法中均能适用。

5　结　论

本文针对具有不确定参数结构时域响应求解问题提出了 PDD 方法。首先将结构时域响应表达为关于结构不确定参数的函数，然后采用一组变量数目逐次增加的成员函数对结构响应函数进行维数分解，并对成员函数进行 Fourier 展开，利用正交多项式基底给出成员函数的近似表达，并给出了由展开系数计算结构响应均值和标准差的表达式。提出的方法将复杂且非显式的函数映射关系表达为显式的函数映射关系。此外，该方法利用了降维积分法，将原来的高维问题转化为更低维度的问题，适用于多维和高维问题的分析。数值算例结果表明，提出的方法具有足够的精确性，且比 MC 方法更加高效，为具有不确定参数复杂结构动力学响应分析提供了一种准确和有效的求解方法。

参考文献(References)：

[1] Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters [J]. *Computational Mechanics*, 2004, **34**(5): 400-409.

[2] 邱志平，王晓军，许孟辉. 工程结构不确定优化设计技术[M]. 北京：科学出版社，2013. (QIU Zhi-ping, WANG Xiao-jun, XU Meng-hui. *Uncertain Optimization Design Technology of Engineering Structure* [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))

[3] 万华平，邰永敢，钟　剑，等. 多项式混沌展开和最大熵原理的结构动力特性不确定性量化[J]. 振动工程学报，2019，**32**(4)：574-580. (WAN Hua-ping, TAI Yong-gan, ZHONG Jian, et al. Uncertainty quantification for structural dynamic characteristics using polynomial chaos expansion and maximum entropy principle[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, **32**(4): 574-580. (in Chinese))

[4] 汤　涛，周　涛. 不确定性量化的高精度数值方法和理论[J]. 中国科学：数学，2015，**45**(7)：891-928. (TANG Tao, ZHOU Tao. Recent developments in high order numerical methods for uncertainty quantification [J]. *Scientia Sinica (Mathematica)*, 2015, **45**(7): 891-928. (in Chinese))

[5] Wu F, Zhong W X. A hybrid approach for the time domain analysis of linear stochastic structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, **265**: 71-82.

[6] 何贻海，姜昌伟，何叶从，等. 基于蒙特卡罗随机有限元方法的随机多孔介质内流体自然对流不确定性研究[J]. 计算力学学报，2018，**35**(1)：62-68. (HE Yi-hai, JIANG Chang-wei, HE Ye-cong, et al. Uncertainty study of natural convection in random porous media based on Monte-Carlo stochastic finite element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, **35**(1): 62-68. (in Chinese))

[7] 张浮平，曹子君，唐小松，等. 基于蒙特卡罗模拟的高效边坡可靠度修正方法[J]. 工程力学，2016，**33**(7)：55-64. (ZHANG Fu-ping, CAO Zi-jun, TANG Xiao-song, et al. Efficient slope reliability updating method based on Monte Carlo simulation[J]. *Engineering Mechanics*, 2016, **33**(7): 55-64. (in Chinese))

[8] Janssen H. Monte-Carlo based uncertainty analysis: Sampling efficiency and sampling convergence [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2013, **109**: 123-132.

[9] Hou T F, Nuyens D, Roels S, et al. Quasi-Monte Carlo based uncertainty analysis: Sampling efficiency and error estimation in engineering applications [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, **191**: 106549.

[10] Wu S Q, Law S S. Evaluating the response statistics of an uncertain bridge-vehicle system [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, **27**: 576-589.

[11] 赵　岩，项　盼，张有为，等. 不确定车轨耦合系统辛随机振动分析[J]. 力学学报，2012，**44**(4)：769-778. (ZHAO Yan, XIANG Pan, ZHANG You-wei, et al. Symplectic random vibration analysis for coupled vehicle-track systems with parameter uncertainties [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(4): 769-778. (in Chinese))

[12] Rabitz H, Alis Ö F. General foundations of high-dimensional model representations [J]. *Journal of Mathematical Chemistry*, 1999, **25**(2-3): 197-233.

[13] Sobol' I M. Theorems and examples on high dimensional model representation [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2003, **79**(2): 187-193.

[14] Rahman S. A polynomial dimensional decomposition for stochastic computing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **76**(13): 2091-2116.

[15] Rahman S. Global sensitivity analysis by polynomial dimensional decomposition [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, **96**(7): 825-837.

[16] Ren X C, Rahman S. Robust design optimization by polynomial dimensional decomposition[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, **48**(1): 127-148.

[17] Lu K, Hou L, Chen Y S. Application of the polynomial dimensional decomposition method in a class of random dynamical systems [J]. *Journal of Vibroengineering*, 2017, **19**(7): 4827-4839.

[18] Rahman S. Statistical moments of polynomial dimensional decomposition [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, **136**(7): 923-927.

A polynomial dimensional decomposition method for analyzing response of uncertain structures in time domain

ZHAO Yan* , LIU Fan, SUN Xiao-xu
(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A polynomial dimensional decomposition method for uncertainty propagation and quantification in time domain is proposed for structures with uncertain parameters, and the evolution processes of statistical moments of structural responses are determined. Firstly, the uncertainties of structural parameters are described by the parametric probabilistic model to establish the dynamic equation of the structure, and the structural response is expressed as a function of uncertain parameters. Furthermore, a dimensional decomposition of the structural response is performed using component functions, and the Fourier expansion of the component function is carried out using orthonormal polynomial basis. Finally, the dimension-reduction integration method is used to calculate the expansion coefficients, and the calculation expressions of the mean value and standard deviation of the response are given. The proposed method is compared with the Monte Carlo method using numerical examples, and the results show that the proposed method has good accuracy and efficiency.

Key words: uncertainty quantification; polynomial dimensional decomposition; orthogonal polynomials; dimension-reduction integration

引用本文/Cite this paper:
赵 岩,刘 凡,孙晓旭.不确定结构时域响应分析的多项式维数分解法[J].计算力学学报,2021,**38**(6):722-728.
ZHAO Yan, LIU Fan, SUN Xiao-xu. A polynomial dimensional decomposition method for analyzing response of uncertain structures in time domain[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(6):722-728.