

DOI: 10.7511/jslx20201019001

# 基于 Kriging 模型和改进 MCMC 算法的 随机有限元模型修正

张雪萍, 彭珍瑞\*, 张亚峰

(兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

**摘要:**针对待修正参数维数较高时,标准马尔可夫链蒙特卡罗 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)算法不易收敛、拒绝率高的问题,提出了基于 Kriging 模型和在 MCMC 中融合花朵授粉算法的修正方法。首先,以待修正参数作为输入,以应变模态作为输出,建立 Kriging 模型,通过蝙蝠算法确定 Kriging 模型的相关系数;然后,采用最大熵的贝叶斯方法估计参数的后验概率密度函数,将花朵授粉算法融入 MH(Metropolis-Hasting)抽样算法,提高局部寻优和全局寻优能力;最后,通过三自由度弹簧-质量系统和三维桁架结构的数值算例验证所提模型修正方法,修正后参数相对误差均低于 0.86%。结果表明,所提方法修正后较高维参数的马尔可夫链能够快速收敛且样本接受率也有所提高,该方法也对随机噪声具有一定的鲁棒性。

**关键词:**模型修正;贝叶斯估计;MCMC 算法;花朵授粉算法;Kriging 模型

**中图分类号:**O327

**文献标志码:**A

**文章编号:**1007-4708(2021)06-0712-10

## 1 引言

在工程领域中,一个能够准确表征结构行为的精确有限元模型非常重要<sup>[1]</sup>。有限元模型修正已成为振动领域研究的热点之一<sup>[2]</sup>。但在实际工程应用中,由于结构几何尺寸、材料变异性和模型误差等因素的影响,不确定性广泛存在于实际结构的参数和响应中<sup>[3]</sup>。

为了使动力学模型能够尽可能地反映实际情况,国内外开始运用随机系统理论建立不确定性模型,在有限元模型修正过程中结合概率方法进行分析是十分必要的<sup>[4]</sup>。不确定性模型修正方法中基于贝叶斯统计理论的研究是一个热点。Beck 等<sup>[5]</sup>将贝叶斯理论引入到模型修正中,并明确了修正的基本思路。韩芳等<sup>[6]</sup>提出了一种基于信息融合和贝叶斯理论的模型修正方法。但是,贝叶斯方法存在无法直接积分求取参数的似然函数和后验概率公式的积分常数等缺点。因此,贝叶斯方法的参数后验概率密度常用马尔可夫链蒙特卡罗 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)方法来推断。Beck 等<sup>[7]</sup>又提出了一种基于 MH(Metropolis-Hastings)

算法的自适应 MCMC 方法。Green<sup>[8]</sup>提出了融合改进退火算法的 MCMC 方法,避免了目标函数陷入局部最优。Lam 等<sup>[9]</sup>使用多个 CPU 生成多个马尔可夫链(而不是单个链)的并行 MCMC 方法来提高 MCMC 方法的计算效率。蒋伟等<sup>[10]</sup>在标准 MCMC 方法的基础上,引入差分进化算法,为提高不确定性模型修正中的计算精度提供了一种新手段。然而,在参数维度较高的情况下,虽然 MCMC 算法采样所得的样本具有一定的收敛性,但马尔可夫链出现大量的停滞阶段,样本的接受率很低<sup>[11]</sup>。彭珍瑞等<sup>[12]</sup>引入了布谷鸟算法中新鸟巢更新的思想改进 MCMC 算法。以上文献大多采用结构的响应为频率和位移等进行模型修正,而在工程实践中会出现选择的响应对局部状态参数不敏感的情况,从而在修正过程中不能得到准确、合理的应力分布。因此,在有限元模型修正方法中,选择一种能够同时反映结构局部状态与全局特征的响应至关重要。同时,在有限元模型修正中,由于所用代理模型精度不高也会使修正结果不理想。

基于上述背景,本文引入花朵授粉算法 FPA(Flower Pollination Algorithm)与标准 MCMC 算法融合,解决在有效提高新样本接受率的同时降低修正参数的相对误差;且由于应变模态包含结构全局的频率信息和能够表征结构局部状态的应变振型信息,因此选用应变模态作为结构响应进行模型修正,并使用蝙蝠算法 BA(Bat Algorithm)确定

收稿日期:2020-10-19;修改稿收到日期:2020-12-26.

基金项目:国家自然科学基金(51768035);甘肃省高校协同创新团队项目(NO. 2018C-12)资助项目.

作者简介:彭珍瑞\*(1972-),男,博士,教授  
(E-mail:pzrui@163.com).

Kriging 模型相关系数,建立精确的代理模型,提高结构响应的计算效率。最后,利用三自由度质量-弹簧系统和三维桁架结构两个数值算例验证所提方法的有效性。

## 2 基于应变模态的贝叶斯方法

### 2.1 应变模态

应变是由位移经过一次求导得来的,对于结构整体而言,应变与位移之间的关系可表示为<sup>[13]</sup>

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{T}\boldsymbol{\varphi}^s \quad (1)$$

式中  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为结构所有点的应变,  $\mathbf{B}$  为结构整体几何矩阵,  $\mathbf{T}$  为局部坐标和总体坐标之间的转换矩阵,  $\boldsymbol{\varphi}^s = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{Y}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{F}e^{j\omega t}$  为总体坐标的节点位移向量。

根据有限元分析模型,由模态叠加法可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{T}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{Y}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{F}e^{j\omega t} = \boldsymbol{\Psi}^\varepsilon\mathbf{Y}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{F}e^{j\omega t} = \sum_{i=1}^k \frac{\boldsymbol{\Psi}_i^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{F}}{-\omega^2 m_i + j\omega c_i + k_i} \quad (2)$$

式中  $\boldsymbol{\varphi} = \text{diag}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_k)$  为结构的位移模态振型矩阵,  $\mathbf{F}e^{j\omega t}$  为外载荷,  $\mathbf{Y} = \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ , 且  $Y_i = (-\omega^2 m_i + j\omega c_i + k_i)^{-1}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ );  $\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{T}\boldsymbol{\varphi}$  为应变模态振型,  $\boldsymbol{\Psi}_i^\varepsilon$  为第  $i$  阶应变模态振型,  $m_i, c_i$  和  $k_i$  分别为第  $i$  阶模态质量、模态阻尼和模态刚度,  $\omega$  为激励频率。

### 2.2 贝叶斯方法

基于贝叶斯统计理论实现有限元模型修正,依据参数  $\boldsymbol{\theta}$  的先验信息结合观测数据  $\mathbf{D}$  (模态信息) 的似然函数来估计参数的后验概率分布。其简化公式可表示为<sup>[5]</sup>

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) = a \cdot P(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta}) \quad (3)$$

式中  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$  为  $m$  维待修正参数向量,  $\mathbf{D}$  为结构固有频率  $\omega_i$  和应变模态振型  $\boldsymbol{\Psi}_i^\varepsilon$  的矩阵,  $a$  为一正则化常数,  $P(\boldsymbol{\theta})$  为待修正参数的先验概率密度函数,  $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$  为参数的后验概率密度函数,  $P(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta})$  为条件概率密度函数。

假设模型误差向量为  $\mathbf{e}$ , 则在模型修正中,对于待修正参数向量  $\boldsymbol{\theta}$  得到以下关系,

$$\mathbf{D}^a = \bar{\mathbf{D}}^a + \mathbf{e}, \mathbf{e} \sim N[0, \text{cov}(\mathbf{e})] \quad (4, 5)$$

$$\boldsymbol{\theta} \sim N[\bar{\boldsymbol{\theta}}, \text{cov}(\boldsymbol{\theta})], \text{cov}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) = 0 \quad (6, 7)$$

式中  $\mathbf{D}^a$  为试验响应向量,  $\bar{\mathbf{D}}^a$  为试验数据  $\mathbf{D}^a$  的均值向量,  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  为待修正参数  $\boldsymbol{\theta}$  的均值向量,  $\text{cov}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e})$  为待修正参数  $\boldsymbol{\theta}$  与测量误差  $\mathbf{e}$  之间的协方差。

根据贝叶斯假设,参数  $\boldsymbol{\theta}$  的先验分布已知,即  $\text{cov}(\mathbf{e}), \bar{\boldsymbol{\theta}}$  和  $\text{cov}(\boldsymbol{\theta})$  均为已知矩阵。当样本信息为应变模态频率和振型时,其条件概率密度函数可表示为

$$P(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}) = P(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\theta}) \cdot P(\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon|\boldsymbol{\theta}) \quad (8)$$

$$P(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \left| \sum_{\omega} \right|^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}]^T \sum_{\omega}^{-1} [\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}]\right\} \quad (9)$$

$$P(\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \left| \sum_{\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon} \right|^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon - \bar{\boldsymbol{\Psi}}^\varepsilon]^T \sum_{\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon}^{-1} [\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon - \bar{\boldsymbol{\Psi}}^\varepsilon]\right\} \quad (10)$$

为减少可行解主观成分,在贝叶斯方法中引入熵。对模型修正这个反问题,应充分利用最大熵原理作为先验信息和约束条件。引入熵  $H$  表达式<sup>[7]</sup>

$$H = [P(\boldsymbol{\theta})|P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})] - \int_{-\infty}^{+\infty} P(\boldsymbol{\theta}) \lg \left[ \frac{P(\boldsymbol{\theta})}{P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})} \right] d\boldsymbol{\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\boldsymbol{\theta}) \lg [P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})] d\boldsymbol{\theta} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(\boldsymbol{\theta}) \lg [P(\boldsymbol{\theta})] d\boldsymbol{\theta} \quad (11)$$

因为  $P(\boldsymbol{\theta})$  已知,所以  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\boldsymbol{\theta}) \lg [P(\boldsymbol{\theta})] d\boldsymbol{\theta}$  为常数。根据最大熵原理,式(11)取最大值即为  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\boldsymbol{\theta}) \lg [P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})] d\boldsymbol{\theta}$  取最大值,即等价于  $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$  取最大值。根据式(3, 8~10)则有

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) = a' \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}J\right] \quad (12)$$

$$J = [\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}]^T \sum_{\omega}^{-1} [\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}] + [\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon - \bar{\boldsymbol{\Psi}}^\varepsilon]^T \sum_{\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon}^{-1} [\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon - \bar{\boldsymbol{\Psi}}^\varepsilon] \quad (13)$$

式中  $a' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \left| \sum_{\omega} \right|^{1/2} \left| \sum_{\boldsymbol{\Psi}^\varepsilon} \right|^{1/2}}$ , 是与  $\boldsymbol{\theta}$  无关的常

数。由式(12)可知,求解  $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$  的最大值即为求解  $J$  的最小值。

## 3 Kriging 代理模型的构造

### 3.1 Kriging 模型

Kriging 模型由一个随机过程和一个线性回归模型构成,其模型可表示为<sup>[14]</sup>

$$f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}_i) \quad (14)$$

式中  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p]^T$  是回归模型系数向量,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = [f_1(\mathbf{x}_i) \ f_2(\mathbf{x}_i) \ \dots \ f_p(\mathbf{x}_i)]^T$  是变量  $\mathbf{x}$  的多项式函数,  $z(\mathbf{x})$  是协方差非零的随机分布,服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ 。利用最小二乘估计可得  $\boldsymbol{\beta}$  和  $\sigma^2$  的估计值,分别为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{d} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}) \quad (16)$$

式中  $\mathbf{F}$  为样本点向量矩阵,  $\mathbf{Y}$  为样本点响应列向量,  $\mathbf{R}$  为空间矩阵, 其中元素  $R_{ij} = R(x_i, x_j)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, d$ ),  $d$  为样本数。  $\boldsymbol{\beta}$  和  $\sigma^2$  均为  $\theta_k$  的函数, 则在 Kriging 模型中唯一决定预测响应精度的未知数是  $\theta_k$ 。

### 3.2 BA 算法

BA 算法从蝙蝠的行为和回声定位能力出发, 利用脉冲发射率  $r$  和脉冲强度  $A$  的多样性来探测、捕食猎物和寻找栖息地, 与其他算法相比, BA 在准确性和有效性方面远优于其他算法, 且没有许多参数要进行调整。因此, 采用蝙蝠算法对其进行寻优以提高模型精度。式(17~19)给出了 BA 算法的主要方程<sup>[15]</sup>为

$$f_i = f_{\min} + \tau(f_{\max} - f_{\min}) \quad (17)$$

$$v_i^t = v_i^{t-1} + (s_i^t - s^*) f_i \quad (18)$$

$$s_i^t = s_i^{t-1} + v_i^t \quad (19)$$

式中  $\tau \in [0, 1]$  为服从均匀分布  $u(0, 1)$  的随机数, 因此频率  $f_i$  可以从  $f_{\min}$  变为  $f_{\max}$ ,  $s_i^t$  和  $v_i^t$  分别为第  $i$  只蝙蝠在  $t$  时刻的位置和速度,  $s^*$  为所有蝙蝠迄今为止找到的当前最佳解。BA 探测、捕食猎物和寻找栖息地是由脉冲强度  $A$  从高值到低值和脉冲发射率  $r$  从低值到高值的变化来定义的, 即

$$A_i^{t+1} = \delta A_i^t \quad (20)$$

$$r_i^{t+1} = r_i^0 [1 - \exp(-\gamma t)] \quad (21)$$

式中  $A_i^t$  为第  $i$  只蝙蝠在  $t$  时刻的脉冲强度,  $\delta$  为脉冲强度衰减因子,  $r_i^0$  为第  $i$  只蝙蝠的初始脉冲发射率,  $\gamma$  为脉冲发射率增强因子。

### 3.3 Kriging 模型的构造

在建立 Kriging 模型时, 需要先设定相关系数  $\theta_k$ , 其直接影响 Kriging 模型的预测精度。采用拉丁超立方抽样方法抽取初始待修正参数区间内的样本, 将其分为训练集和测试集(训练集和测试集数据互不相同), 并利用有限元方法计算所对应的响应值。然后, 以训练集作为 Kriging 模型的输入, 对应的结构应变模态频率和振型作为响应来构建 Kriging 模型; 以测试集对应的试验响应值与 Kriging 模型预测响应值之间的均方根误差 RMSE 作为 BA 的目标函数即式(22), 寻求最优相关系数。最后, 用寻得的最优相关系数构建 Kriging 模型。

$$\text{RMSE} = \frac{1}{d} \sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i^a - y_i^m)^2} \quad (22)$$

式中  $y_i^a$  和  $y_i^m$  分别为第  $i$  组样本所对应的测试集

响应值和 Kriging 模型预测响应值,  $\bar{y}$  为试验响应值的平均值。然后, 用 RMSE 来评估 Kriging 模型的精度, 此值越接近于 0, 表示测试集响应值与 Kriging 模型预测值之间的误差越小。

## 4 改进的 MCMC 算法

### 4.1 MH 算法

MH 算法是一种基于模拟的 MCMC 技术, 它的一个重要应用是从给定概率分布中抽样, 使马尔可夫链稳态于该概率密度。即构造一个 Markov 链, 通过抽样获取后验分布  $P(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})$  的样本数据, 根据大数定理可获得修正后参数  $\boldsymbol{\theta}$  的均值和方差。在模型修正中 MH 算法的步骤如下<sup>[16, 17]</sup>。

(1) 选择具有物理意义的初始值  $\boldsymbol{\theta}_0$ 。

(2) 利用当前  $\boldsymbol{\theta}^t$  的值, 依据建议分布  $q(\cdot | \boldsymbol{\theta}^t)$  产生一个候选值  $\boldsymbol{\theta}'$ 。

(3) 根据接受概率函数<sup>[16]</sup>(23)计算接受率

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}^t, \boldsymbol{\theta}') = \min \left[ 1, \frac{p(\boldsymbol{\theta}' | \mathbf{D})}{p(\boldsymbol{\theta}^t | \mathbf{D})} \right] \quad (23)$$

(4) 从均匀分布  $u(0, 1)$  中产生随机变量  $u$ 。

(5) 当  $\alpha(\boldsymbol{\theta}^t, \boldsymbol{\theta}') > u$  时接受  $\boldsymbol{\theta}'$ , 使  $\boldsymbol{\theta}^{t+1} = \boldsymbol{\theta}'$ , 否则取  $\boldsymbol{\theta}^{t+1} = \boldsymbol{\theta}^t$ 。

(6) 重复步骤(2~5), 直至收敛。

### 4.2 基于 FPA 的 MCMC 方法

目前, MCMC 方法已成为处理复杂高维积分运算的有效工具, 但随着参数维度增加, 其后验分布更复杂, 标准 MH 算法的样本接受率会随之降低, 致使采样出现停滞现象。

FPA 具有异花授粉(全局寻优)和自花授粉(局部寻优)两大特性。异花授粉过程可以逃离任何局部景观, 进而探索更大的空间; 自花授粉过程使相似的解更频繁地选择, 从而保证更快地收敛, 其收敛速度本质上是指数的, 因此寻优效率更高<sup>[18]</sup>。本文采用 FPA 改进的 MCMC 抽样来提高采样接受率及样本多样性。即在  $N$  条满足条件的马尔可夫链中, 采用 FPA 的异花授粉和自花授粉再一次寻优来更新候选参数。用待修正参数  $\boldsymbol{\theta}$  的目标函数  $J$  值来度量个体所处位置的优劣, 将个体的优胜劣汰过程类比为搜索和优化过程中用较好的可行解取代较差可行解的迭代过程, 因此, MCMC 算法的接受率有了很大程度提高的同时增加了样本多样性, 提高了寻优效率, 且保证样本收敛在合理的范围。

在上述 MH 算法的基础上, 计算接受率  $\alpha(\boldsymbol{\theta}^t, \boldsymbol{\theta}')$  之前, 根据 FPA 原理<sup>[18]</sup>, 当全局与局部寻优的

转换概率  $p > 0.8$  时,进行全局寻优计算产生候选点  $\theta_i^{t+1}$

$$\theta_i^{t+1} = \theta_i^t + L(\theta_i^t - \theta^*) \quad (24)$$

式中  $\theta_i^t$  为第  $i$  条马尔可夫链第  $t$  次的迭代样本,  $\theta^*$  为当前生成的所有样本中找到的最佳样本点,参数  $L$  为授粉强度,即搜寻步长。使用 Lévy 飞行有效地模仿这一特征,即从 Lévy 分布中提取  $L > 0$ ,

$$L = \frac{\left\{ \frac{\Gamma(1 + \beta) \sin(\pi\beta/2)}{\Gamma[(1 + \beta)/2] \beta \cdot 2^{(\beta-1)/2}} \right\}^{1/\beta} \cdot u}{|v|^{1/\beta}} \cdot \Delta \quad (25)$$

式中  $u \sim N(0, 1)$ ,  $v \sim N(0, 1)$ ,  $\Delta = (\theta_i^t - \theta_{best}^t)$ ,  $\theta_{best}^t$  为标准 MH 算法在第  $t$  次迭代时所需  $N$  条马尔可夫链的样本最优值。当转换概率  $p \leq 0.8$  时,进行局部寻优产生候选点  $\theta_i^{t+1}$

$$\theta_i^{t+1} = \theta_i^t + \xi(\theta_j^t - \theta_k^t) \quad (26)$$

式中  $\xi$  为  $[0, 1]$  上产生的随机数,  $\theta_j^t$  和  $\theta_k^t$  分别为标准 MH 算法第  $t$  次迭代样本的第  $j$  和  $k$  条马尔可夫链的值,这在本质上模拟了参数在有限条马尔可夫链值寻优的稳定性。在确定候选点  $\theta_i^{t+1}$  之后,根据接受概率  $\alpha(\theta^t, \theta')$  接受候选状态  $\theta_i^{t+1} = \theta_i^{t+1}$ , 否则  $\theta_i^{t+1} = \theta_i^t$ 。然后,重复 MH 算法的步骤 (2)~(5),直至收敛。

### 5 模型修正过程

根据上述理论,结合先验信息和已构造的 Kriging 代理模型产生的预测响应值,由贝叶斯统计理论推导后验概率密度函数。首先,用 MCMC 算法迭代求解  $N$  条马尔可夫链和每次迭代所得的最优值;然后,用 FPA-MCMC 算法迭代求解得到  $l$  条马尔可夫链,即可得到待修正参数的后验概率密度;最后,由后验分布统计特征获得修正后的参数值,完成模型修正,修正流程如图 1 所示。

### 6 数值算例

#### 6.1 三自由度弹簧-质量系统

使用如图 2 所示的三自由度弹簧-质量系统对所提算法的有效性进行验证。该系统的确定性参数为  $m_1 = m_2 = m_3 = 1.0 \text{ kg}$ ,  $k_3 = k_4 = 10 \text{ N/m}$ ,  $k_5 = 30 \text{ N/m}$ 。假设不确定参数的试验真实均值为  $k_1 = 10 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 14 \text{ N/m}$  和  $k_5 = 12 \text{ N/m}$ ,且服从独立正态分布。结构的固有频率为  $\omega_1 = 3.351 \text{ Hz}$ ,  $\omega_2 = 6.759 \text{ Hz}$ ,  $\omega_3 = 9.005 \text{ Hz}$ ,假定不确定参数的初始值是  $k_1 = 6 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 16 \text{ N/m}$ ,  $k_5 = 10 \text{ N/m}$ 。选用  $k_1, k_2$  和  $k_5$  为待修正参数,表示为  $\theta = \{\theta_1,$

$\theta_2, \theta_3\}$ 。使用贝叶斯公式计算其后验概率分布,用所提算法对该分布进行采样,迭代次数  $n = 5000$ ,待修正参数  $\theta_i$  的取值范围为  $[5, 20]$ ,初始值  $\theta^0 = \{6, 16, 10\}$ 。

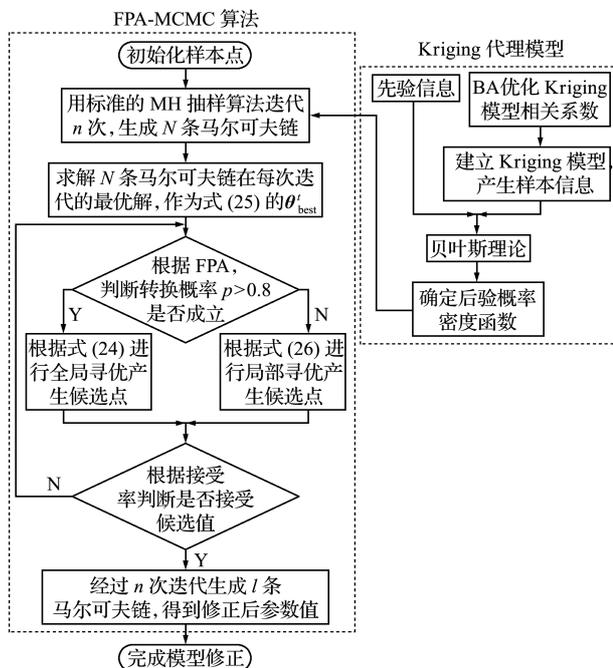


图 1 模型修正流程

Fig. 1 Process of model updating

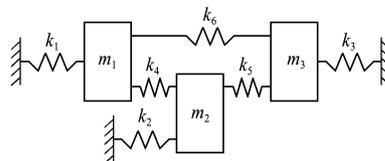


图 2 三自由度弹簧-质量系统

Fig. 2 Three-DOF spring-mass system

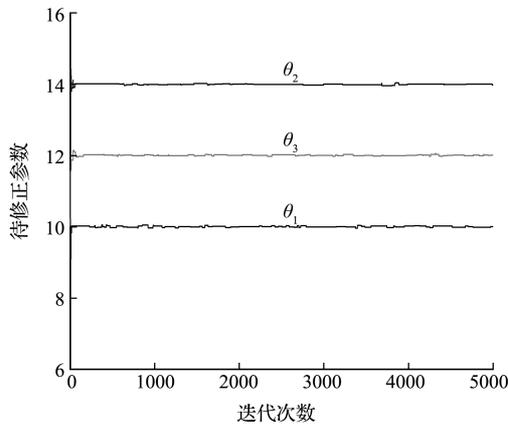
分别采用标准 MCMC 算法与 FPA-MCMC 算法进行 5000 次迭代后得到待修正参数的马尔可夫链如图 3 所示。可以看出,两种算法得到的马尔可夫链均能收敛到试验真实值,但改进的 FPA-MCMC 算法能够有效克服采样停滞的缺点,其抽样多样性优于标准 MCMC 算法。由式 (23) 计算得到改进算法的样本接受率为 74.5%,与同维度下标准 MCMC 算法 3% 的接受率相比,改进算法的采样效果更好。其中,两种算法迭代所得  $\theta_1$  的马尔可夫链如图 4 所示,可以看出,所提算法遍历性远优于标准 MCMC 算法;图 5 为  $\theta_1$  的概率分布直方图,可以看出,其后验均值基本上与预设的真实值相吻合。

虽然初始值的选取不会影响收敛的最终结果,但对参数的选取误差越大,则燃烧期越长,因此去

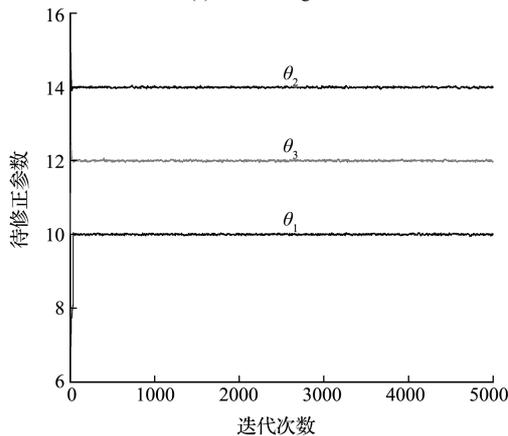
掉样本集的前 300 次迭代值,降低所选初始值不佳的影响。然后,检验后验样本的正态概率结果,如图 6 所示,可以看出,改进算法抽样得到的样本点基本与假设的参数分布线重合,因此样本的正态分布假设成立。并对不确定性参数  $\theta_i$  的置信区间做

出了概率性的估计,如图 7 所示,在置信椭圆内为含 95% 样本参数的区域。改进算法经过 5000 次迭代后,待修正参数基本位于置信椭圆轮廓内。

由后验分布统计特征得到修正后的不确定性参数值和响应值,修正结果列入表 1 和表 2,可知

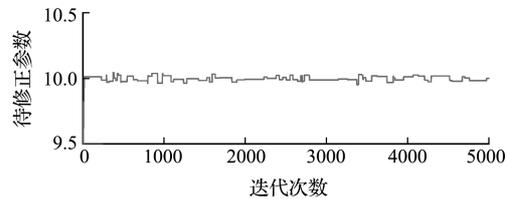


(a) MCMC 算法  
(a) MCMC algorithm

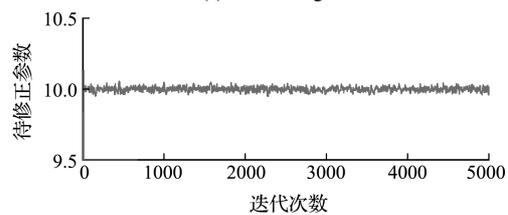


(b) FPA-MCMC 算法  
(b) FPA-MCMC algorithm

图 3 三条马尔科夫链  
Fig. 3 Three Markov chains



(a) MCMC 算法  
(a) MCMC algorithm



(b) FPA-MCMC 算法  
(b) FPA-MCMC algorithm

图 4  $\theta_1$  两种算法的马尔科夫链

Fig. 4 Two algorithms for the Markov chain of  $\theta_1$

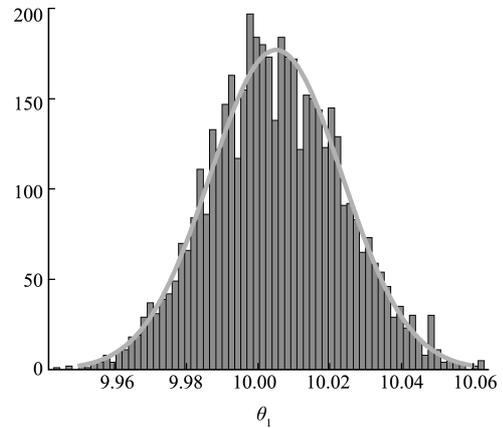


图 5  $\theta_1$  概率分布直方图

Fig. 5 Probability distribution histogram of  $\theta_1$

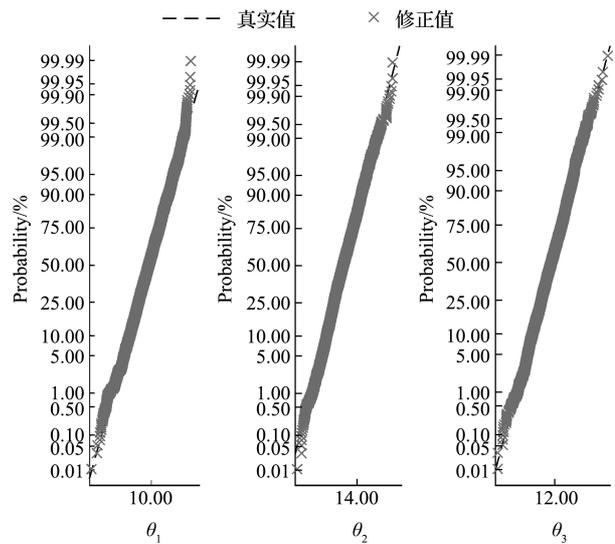


图 6 参数的正态概率检验图

Fig. 6 Normal test probability graph of parameters

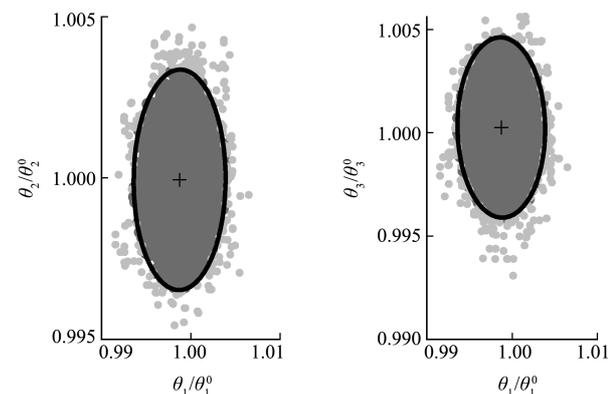


图 7 置信椭圆的散点图

Fig. 7 Scatter point graph of confidence ellipse

待修正参数在修正后均接近假设的真实值,且修正后参数对应响应值的相对误差都小于 0.02%,表明所提算法修正效果较好。

表 1 修正参数的对比

Tab. 1 Comparison of parameters updating

刚度参数	初始值	真实值	修正前	修正后均值	修正后
$/N \cdot m^{-1}$	$/N \cdot m^{-1}$	$/N \cdot m^{-1}$	误差/%	$/N \cdot m^{-1}$	误差/%
$\theta_1$	6.000	10.000	40.00	9.991	$9.00 \times 10^{-2}$
$\theta_2$	16.000	14.000	14.29	13.990	$7.14 \times 10^{-2}$
$\theta_3$	10.000	12.000	16.67	11.997	$2.15 \times 10^{-2}$

表 2 修正前后频率对比

Tab. 2 Comparison of frequencies before and after updating

模态	真实频率	初始频率	修正前误差	修正结果	修正后误差
	/Hz	/Hz	%	/Hz	%
1	3.351	3.192	4.74	3.3508	$5.97 \times 10^{-3}$
2	6.759	6.613	2.16	6.7583	$1.04 \times 10^{-2}$
3	9.005	8.836	1.88	9.0043	$7.77 \times 10^{-3}$

### 6.2 三维桁架结构

选用如图 8 所示三维桁架来进一步验证所提方法的有效性。模型总重为 54 kg,跨度为 2800 mm,节间长度为 400 mm,共七节。主桁中心距为 360 mm,桁高为 270 mm,跨高比为 10,材料的泊松比为 0.3。该桁架共有 28 个节点和 94 个杆单元,将杆单元分为两组,主桁杆各单元为第一组,上下平纵联各单元为一组。假设初始有限元模型弹性模量  $E_0$  为 210 GPa,密度  $\rho_0$  为 7800 kg/m<sup>3</sup>,分别取  $\theta_1 = E_1/E_0, \theta_2 = \rho_1/\rho_0, \theta_3 = E_2/E_0$  和  $\theta_4 = \rho_2/\rho_0$ ,各试验模型参数正态分布的均值矩阵为 [1.5, 2, 2.5, 3],标准差均为 0.05;待修正参数的取值下界和上界分别为 [1, 1.5, 2, 2.5] 和 [2, 2.5, 3, 3.5]。分别选择应变模态的前 6 阶频率及前 3 阶振型作为目标响应。

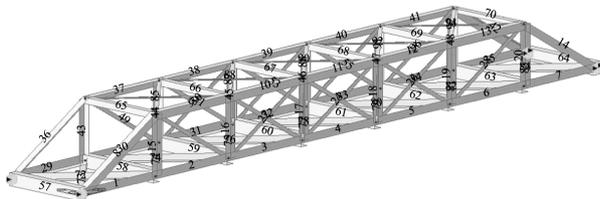


图 8 三维桁架模型

Fig. 8 Three-dimensional truss model

采用拉丁超立方抽样抽取 2500 组样本参数,分为 2000 组训练集和 500 组测试集,选取前 6 阶应变模态频率值和第 60 杆单元的前 3 阶应变模态振型值作为目标响应,通过训练集的样本和其响应值来构造 Kriging 模型。设置 BA 的种群大小为

20,迭代次数为 100,从区间 [0.1, 50] 内寻得最优相关系数  $\theta_k$ ,其中第 5 阶频率的迭代过程如图 9 所示。

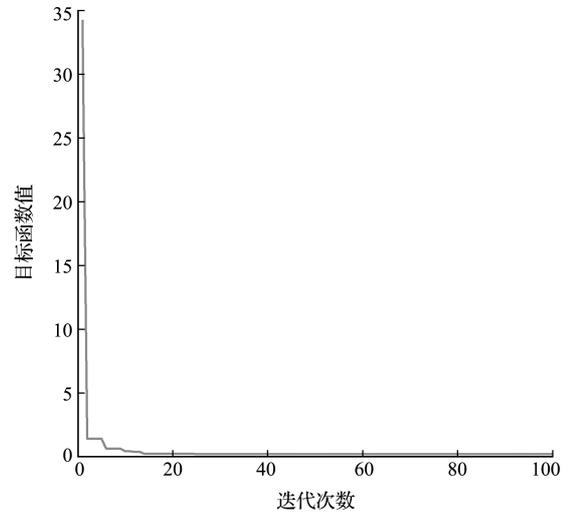


图 9 第 5 阶频率迭代曲线

Fig. 9 Iteration curve of the fifth order frequency

由优化所得  $\theta_k$  值构建 Kriging 模型,并重新在参数取值范围内抽取 500 组样本,根据式(22)计算得到 RMSE 为  $1.808 \times 10^{-7}$ ,其中第 5 阶频率的拟合情况如图 10 所示。可以看出,Kriging 模型预测值和真实值几乎全部重合,说明所建立的 Kriging 模型预测精度很高,可以替代有限元模型进行模型修正。

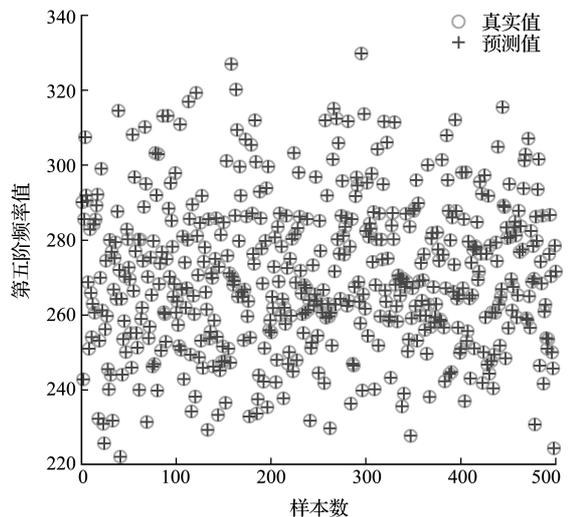
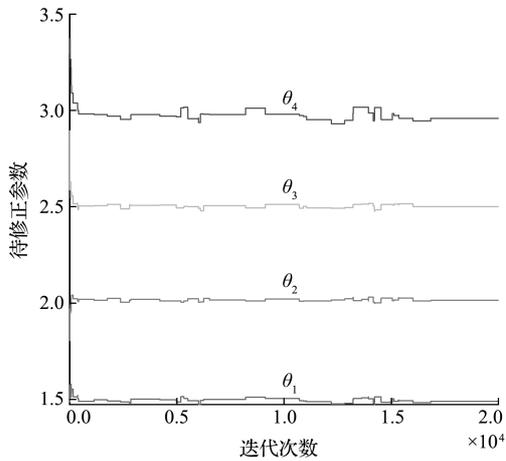


图 10 模型预测

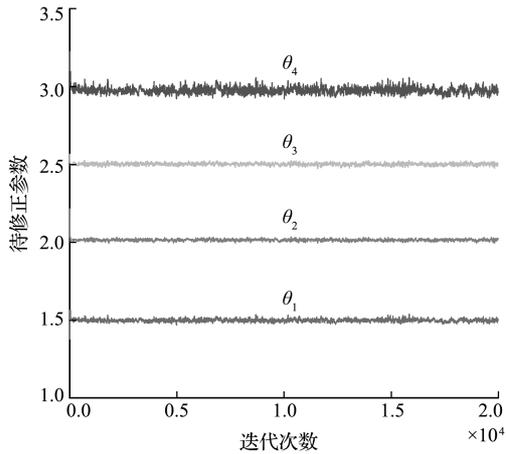
Fig. 10 Model prediction

按假设试验模型随机产生 50 组试验样本,将样本代入结构得到应变模态作为仿真试验响应,然后根据试验响应的均值和方差修正有限元模型,两种算法经 20000 次采样产生的马尔可夫链如图 11 所示。可以看出,改进算法产生的马尔可夫链一直在试验模型参数值附近变化,其接受率与遍历性均

有所提高,改进算法的采样效果较好。为进一步验证所提方法的有效性,假定频率和模态振型的噪声在不同模态阶数上相互独立,对试验频率和模态振型加入 5% 的随机噪声来考虑试验数据的不确定性,得到如图 12 所示的马尔科夫链,可以看出,待



(a) MCMC 算法  
(a) MCMC algorithm



(b) FPA-MCMC 算法  
(b) FPA-MCMC algorithm

图 11 两种算法的马尔科夫链  
Fig. 11 Markov chains of two algorithms

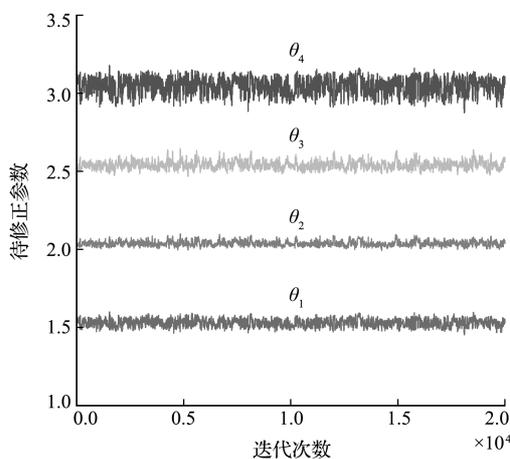


图 12 FPA-MCMC 算法马尔氏链  
Fig. 12 Markov chains of FPA-MCMC

修正参数均在均值附近收敛,对噪声具有良好的鲁棒性。

修正后参数的后验正态概率结果如图 13 所示。可以看出,改进算法抽样所得样本点与试验模型参数值分布线基本重合,能够较好地模拟后验样本。并对修正参数  $\theta_i$  的置信区间做出了概率性的估计如图 14 所示,在置信椭圆内为含 95% 样本参数的区域,可以看出,待修正参数基本位于置信椭圆轮廓内的高概率区域。修正后参数的正态概率分布直方图如图 15 所示,可以看出,修正后参数的后验均值基本上与预设的真实值相吻合,表明后验分布的样本符合正态分布。

表 3 为参数  $\theta_i$  的修正结果,可知当初始值选取误差较大时,仍可得到较精确的结果。表 4 和表 5 为修正所得应变模态振型和频率的结果,可知其修正值和对应的响应值的相对误差均较小,因此所提算法的修正结果精度较高,模型修正效果较好。

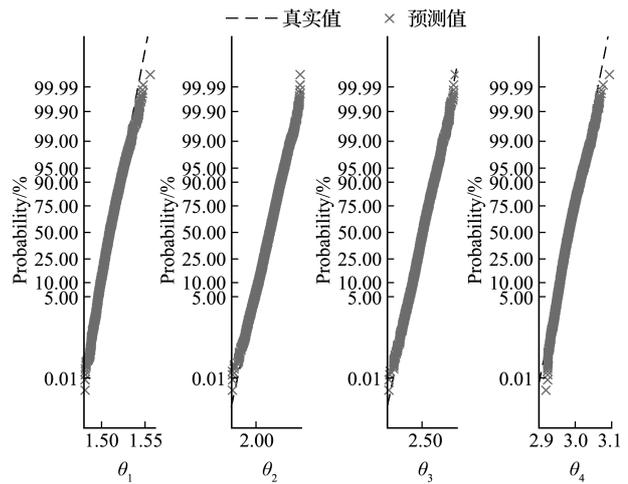


图 13 正态概率检验图  
Fig. 13 Normal test probability map

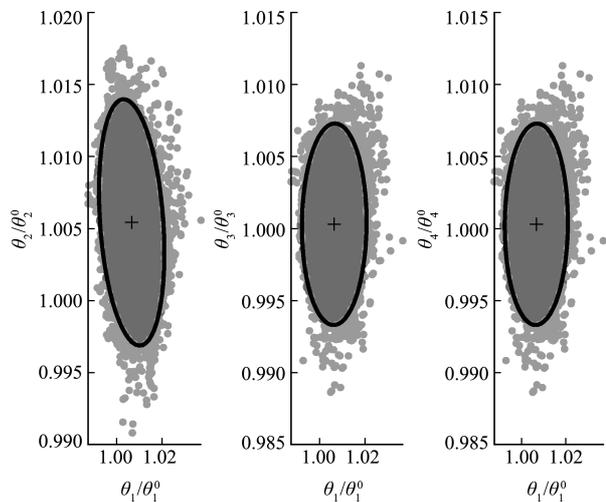
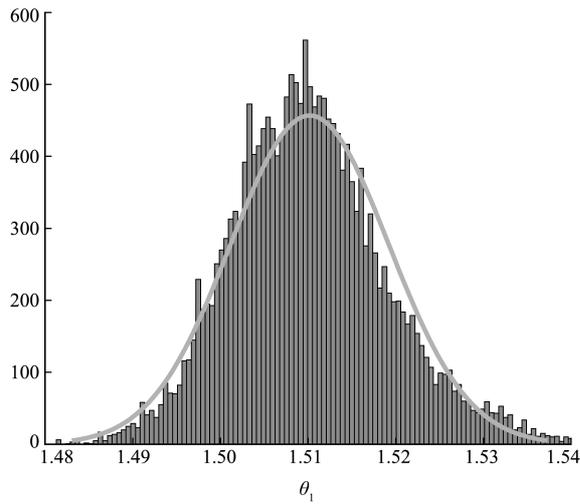
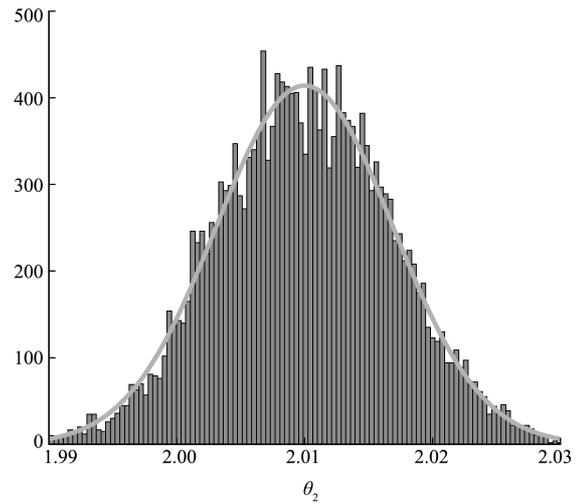


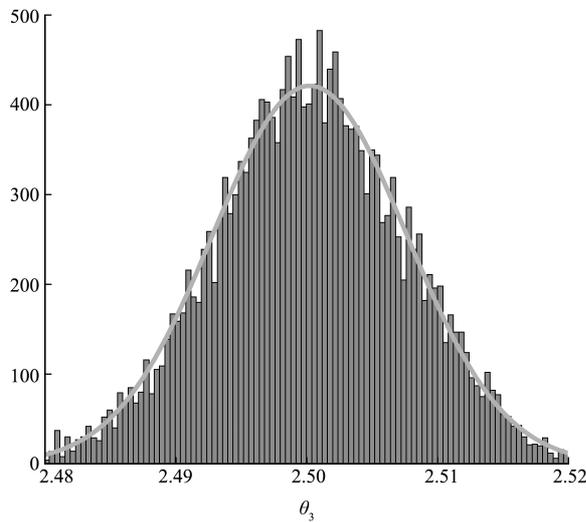
图 14 置信椭圆的散点图  
Fig. 14 Scatter point graph of confidence ellipse



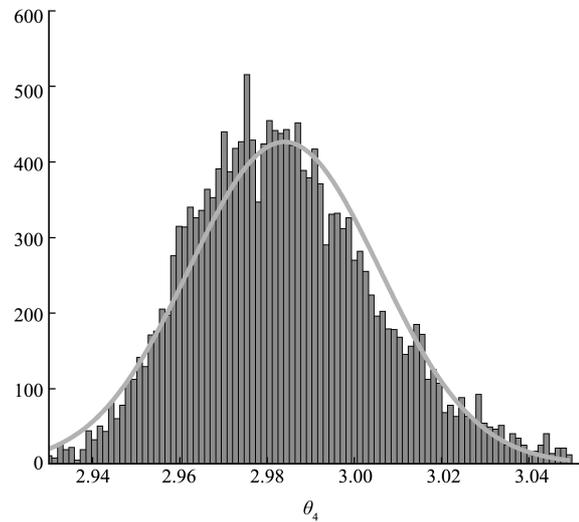
(a)  $\theta_1$  的概率分布直方图  
(a) Probability distribution histogram of  $\theta_1$



(b)  $\theta_2$  的概率分布直方图  
(b) Probability distribution histogram of  $\theta_2$



(c)  $\theta_3$  的概率分布直方图  
(c) Probability distribution histogram of  $\theta_3$



(d)  $\theta_4$  的概率分布直方图  
(d) Probability distribution histogram of  $\theta_4$

图 15 参数的概率分布直方图  
Fig. 15 Probability distribution histogram of parameters

表 3 修正参数对比

Tab. 3 Comparison of parameters updating

参数	试验值	初始值	修正前误差 /%	修正后参数 均值	修正后误差 /%
$\theta_1$	1.500	1.022	31.87	1.510	0.67
$\theta_2$	2.000	1.535	23.25	2.010	0.50
$\theta_3$	2.500	2.574	2.96	2.500	0.00
$\theta_4$	3.000	2.603	13.23	2.985	0.50

表 4 修正前后模态振型对比

Tab. 4 Comparison of mode shapes before and after updating

振型	真实值	初始值	修正前误差 /%	修正结果 均值	修正后误差 /%
1	3.216	0.127	96.05	3.228	$3.73 \times 10^{-1}$
2	5.321	4.468	16.03	5.446	2.35
3	52.104	49.974	4.09	52.078	$4.99 \times 10^{-2}$

表 5 修正前后频率对比

Tab. 5 Comparison of frequencies before and after updating

频率	真实值 /Hz	初始值 /Hz	修正前误差 /%	修正结果均值 /Hz	修正后误差 /%
1	101.971	92.569	9.22	102.119	$1.45 \times 10^{-1}$
2	102.729	97.551	5.04	102.693	$3.50 \times 10^{-2}$
3	194.895	204.208	4.78	195.081	$9.54 \times 10^{-2}$
4	228.723	206.995	9.50	228.963	$1.05 \times 10^{-1}$
5	271.632	274.869	1.19	271.752	$4.42 \times 10^{-2}$
6	313.841	314.511	0.21	314.130	$9.21 \times 10^{-2}$

## 7 结论

(1) 在贝叶斯统计理论的基础上,将 FPA 的局部优化和全局优化特性融入 MCMC 算法,保证了候选样本的合理性,也提高了寻优效率,且对噪

声也具有一定的鲁棒性,实现了较高维持修正参数下的随机有限元模型修正。

(2) 在构造 Kriging 模型时,利用 BA 对 Kriging 模型的相关系数进行寻优,使所构造的 Kriging 模型具有良好的拟合精度和预测能力,能代替有限元模型进行迭代计算,使修正结果更可靠且提高了模型修正计算效率。

(3) 修正结果显示,所提修正方法增加了马尔可夫链的遍历性和样本合理性,同时大大地提高了样本接受率,克服了传统 MH 算法在参数维度高的情况下接受率低的缺点。

### 参考文献(References):

- [1] 万华平,任伟新,王宁波. 高斯过程模型的全局灵敏度分析的参数选择及采样方法[J]. 振动工程学报, 2015, **28**(5): 714-720. (WAN Hua-ping, REN Weixin, WANG Ning-bo. A Gaussian process model based global sensitivity analysis approach for parameter selection and sampling methods [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, **28**(5): 714-720. (in Chinese))
- [2] 刘继承,周传荣. 一个基于优化的有限元模型修正方法[J]. 振动与冲击, 2003, **22**(2): 33-34. (LIU Ji-cheng, ZHOU Chuan-rong. FE model updating method based on optimization[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2003, **22**(2): 33-34. (in Chinese))
- [3] 殷红,崔攀,彭珍瑞. 基于径向基函数的频响函数模型修正[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(4): 417-423. (YIN Hong, CUI Pan, PENG Zhen-rui. Model updating of frequency response function based on radial basis function[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(4): 417-423. (in Chinese))
- [4] 冯新,李国强,周晶. 土木工程结构健康诊断中的统计识别方法综述[J]. 地震工程与工程振动, 2005, **25**(2): 105-113. (FENG Xin, LI Guo-qiang, ZHOU Jing. State-of-the-art of statistical identification for structural health diagnosis in civil engineering[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2005, **25**(2): 105-113. (in Chinese))
- [5] Beck J L, Katafygiotis L S. Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, **124**(4): 455-461.
- [6] 韩芳,钟冬望,汪君. 基于贝叶斯法的复杂有限元模型修正研究[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(1): 39-43. (HAN Fang, ZHONG Dong-wang, WANG Jun. Complicated finite element model updating based on Bayesian method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(1): 39-43. (in Chinese))
- [7] Beck J L, Au S K. Bayesian updating of structural models and reliability using Markov Chain Monte Carlo simulation [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, **128**(4): 380-391.
- [8] Green P L. Bayesian system identification of a nonlinear dynamical system using a novel variant of simulated annealing [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, **52-53**: 133-146.
- [9] Lam H F, Hu J, Zhang F L, et al. Markov chain Monte Carlo-based Bayesian model updating of a sailboat-shaped building using a parallel technique [J]. *Engineering Structures*, 2019, **193**: 12-27.
- [10] 蒋伟,刘纲. 基于多链差分进化的贝叶斯有限元模型修正方法[J]. 工程力学, 2019, **36**(6): 101-108. (JIANG Wei, LIU Gang. Bayesian finite element model updating method based on multi-chain differential evolution [J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(6): 101-108. (in Chinese))
- [11] 刘纲,罗钧,秦阳,等. 基于改进 MCMC 方法的有限元模型修正研究[J]. 工程力学, 2016, **33**(6): 138-145. (LIU Gang, LUO Jun, QIN Yang, et al. A finite element model updating method based on improved MCMC method [J]. *Engineering Mechanics*, 2016, **33**(6): 138-145. (in Chinese))
- [12] 彭珍瑞,郑捷,白钰,等. 一种基于改进 MCMC 算法的模型修正方法[J]. 振动与冲击, 2020, **39**(4): 236-245. (PENG Zhen-rui, ZHENG Jie, BAI Yu, et al. A model updating method based on an improved MCMC algorithm [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, **39**(4): 236-245. (in Chinese))
- [13] 展铭,郭勤涛,岳林,等. 使用应变模态和遗传算法的有限元模型修正方法[J]. 振动、测试与诊断, 2018, **38**(5): 974-978, 1081. (ZHAN Ming, GUO Qin-tao, YUE Lin, et al. Finite element model updating using strain mode and genetic algorithm-based method [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2018, **38**(5): 974-978, 1081. (in Chinese))
- [14] Zhou Y C, Lu Z Z. An enhanced Kriging surrogate modeling technique for high-dimensional problems [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, **140**: 106687.
- [15] Yang X S. A new metaheuristic bat-inspired algorithm [J]. *Computer Knowledge & Technology*, 2010, **284**: 65-74
- [16] Haario H, Saksman E, Tamminen J. An adaptive metropolis algorithm [J]. *Bernoulli*, 2001, **7**(2): 223-242.
- [17] Yuen K V. Recent developments of Bayesian model class selection and applications in civil engineering [J]. *Structural Safety*, 2010, **32**(5): 338-346.
- [18] Yang X S. Flower pollination algorithm for global optimization [A]. International Conference on Unconventional Computing and Natural Computation [C]. Berlin Heidelberg: Springer, 2012.

## Stochastic finite element model updating based on Kriging model and improved MCMC algorithm

ZHANG Xue-ping, PENG Zhen-ru<sup>\*</sup>, ZHANG Ya-feng

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** Aiming at the problems of poor convergence and high rejection rate of standard Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithm when the dimension of parameters to be updated is high, an efficient updating method combining flower pollination algorithm and Kriging model is proposed. Firstly the Kriging model is established by using the parameters to be updated as the inputs and the strain mode as the output. The correlation coefficients of the Kriging model are optimized by bat algorithm. Then, the maximum entropy Bayesian method is adopted to estimate the posterior probability density function of parameters. The flower pollination algorithm is incorporated to Metropolis-Hastings (MH) sampling algorithm to improve the local and global search ability. Finally, numerical examples of a three-DOF spring-mass system and a three-dimensional truss are used to verify the proposed model updating method, and relative error of the updated parameters are found to be less than 0.86%. The results show that the updated Markov chains with higher dimensional parameters can converge rapidly and the sample acceptance rate is high, and the proposed method is also robust to random noise.

**Key words:** model updating; bayesian estimates; Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithm; flower pollination algorithm (FPA); kriging model

---

引用本文/Cite this paper:

张雪萍,彭珍瑞,张亚峰. 基于 Kriging 模型和改进 MCMC 算法的随机有限元模型修正[J]. 计算力学学报, 2021, 38(6): 712-721.

ZHANG Xue-ping, PENG Zhen-ru, ZHANG Ya-feng. Stochastic finite element model updating based on Kriging model and improved MCMC algorithm[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, 38(6): 712-721.