

DOI: 10.7511/jslx20190918004

考虑空间变异性的框架结构可靠度分析方法

刘敬敏¹, 杨绿峰², 余波^{*2}

(1. 广西科技大学 土木建筑工程学院, 柳州 545006;

2. 广西大学 土木建筑工程学院, 工程防灾与结构安全教育部重点实验室,
广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 南宁 530004)

摘要:空间变异性是结构参数的固有属性,对于工程结构的随机响应和可靠度分析具有重要影响。结合随机场离散的局部平均理论和随机响应分析的摄动随机有限元法,提出一种考虑参数空间变异性的平面框架结构可靠度分析方法,并定量分析了参数空间变异性对结构可靠度的影响规律。首先,考虑随机因素的空间变异性,采用二维线性随机场离散的局部平均理论将平面框架结构的连续随机场离散为一组随机变量,并通过理论推导建立了随机场局部平均协方差矩阵的二重积分表达式;然后,采用摄动随机有限元法分析结构随机响应及其对基本随机变量的梯度向量,并利用可靠度分析的梯度优化法计算结构可靠指标,从而提出了一种考虑参数空间变异性的平面框架结构可靠度分析方法。分析表明,该方法具有较高的计算精度和计算效率;随机场离散的局部平均理论对相关结构类型不敏感;随着随机场相关偏度和变异性的增大,框架结构的可靠指标逐渐减小,说明结构参数的空间变异性对结构可靠度的影响不容忽视。

关键词:可靠度;空间变异性;随机场;局部平均;随机有限元法

中图分类号: TU311.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2020)06-0677-08

1 引言

结构可靠度分析对于工程结构的设计和概率安全性评估具有重要意义。近年来,框架结构的可靠度分析得到国内外学者的广泛关注。其中,文献[1]利用非线性有限元法开展了框架结构的可靠度分析;文献[2]研究了按照加拿大建筑规范设计的钢框架结构的可靠度;文献[3]基于随机有限元的梯度优化法,研究了荷载和截面惯性矩等参数为随机变量时的框架结构可靠度;文献[4]通过现场测量获取了钢筋混凝土框架结构的几何尺寸和材料参数的施工误差统计信息,进而采用验算点法计算了框架结构的可靠度;文献[5]利用基于一次可靠度的有限元方法分析了框架结构的可靠度;文献[6,7]采用响应面法计算了框架结构的可靠度。需要说明的是,上述研究成果都将结构的材料参数描述为随机变量,而忽略了材料参数空间变异性的影

响。然而,由于材料制备、施工技术和腐蚀缺陷等因素的影响,结构的材料参数通常具有显著的空间变异性^[8-19]。文献[8]利用随机有限元法分析了弹性模量具有随机性的钢框架结构的可靠度,采用中点法离散随机场,导致适用性和计算精度难以保证。通过分析发现,目前国内外传统的随机场离散方法主要局限于一维杆系单元^[9]、二维平面单元^[10,11]或三维实体单元^[12-14],而缺少一种针对由杆系单元组成的平面框架随机场的有效离散方法,所以无法有效分析材料参数空间变异性对框架结构可靠度的影响^[9,10]。

本文结合随机场离散的局部平均理论和随机响应分析的摄动随机有限元法,提出了一种能够有效考虑材料参数空间变异性的框架结构可靠度分析方法,进而定量分析了材料参数空间变异性(如随机场的相关结构类型、相关偏度和变异性等)对框架结构可靠度的影响规律。

2 空间变异性的随机场模型及离散

采用平面内广义平稳且均匀的随机场来模拟框架结构的材料参数、几何尺寸和外荷载等因素在空间分布上的变异性。以图1(a)所示门式刚架为例,将任一个单元(假定平面内长度为 L_i 的线性单元 i 或长度为 L_j 的线性单元 j)模拟为平面内广义

收稿日期:2019-09-18;修改稿收到日期:2020-07-09.

基金项目:国家自然科学基金(51668008;51738004);
广西杰出青年科学基金(2019GXNSFFA245004);
广西自然科学基金(2018GXNSFAA281344;
2018GXNSFBA281186);广西科技基地和人才专项项目(桂科AD19245125)资助项目.

作者简介:余波*(1982-),男,博士,教授,博士生导师
(E-mail:gxuyubo@gxu.edu.cn).

平稳且均匀的 M 维随机场 $\mathbf{R}(x, y, \theta)$, 其中 x 和 y 为随机场的平面坐标, θ 为随机场的随机特性参数。已知随机场的均值和方差分别为

$$\boldsymbol{\mu}_R = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M]^T \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_R^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2]^T \quad (2)$$

2.1 随机场的局部平均离散技术

如图 1(b)所示, 已知平面内长度为 L_i 的线性单元 i 与 x 轴成夹角 ϕ , 根据坐标 x 和 y 的线性关系有 $\mathbf{R}(x, y, \theta) = \mathbf{R}(z, \theta)$ 。将随机场 $\mathbf{R}(z, \theta)$ 离散为 N 个一维线性单元, 且在单元 i 上的局部平均定义为

$$\mathbf{R}^{(i)} = [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}, \dots, R_M^{(i)}]^T \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

式中 $R_r^{(i)}$ 为随机场 $\mathbf{R}(z, \theta)$ 的第 r 维分量 $R_r(z, \theta)$ 在单元 i 上的局部平均, 且有^[20]

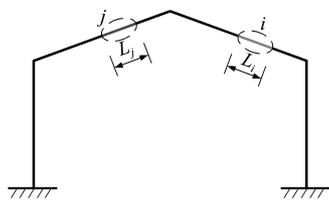
$$R_r^{(i)} = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} R_r(z, \theta) dz \quad (i = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

据此可以将具有 M 个分量的随机场 $\mathbf{R}(z, \theta)$ 离散成一组随机向量:

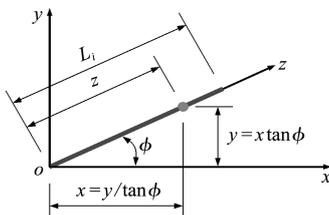
$$\mathbf{x} = [\mathbf{R}_r^{(1)T}, \mathbf{R}_r^{(2)T}, \dots, \mathbf{R}_r^{(N)T}]^T \quad (5)$$

且 $R_r^{(i)}$ 的均值和方差分别为

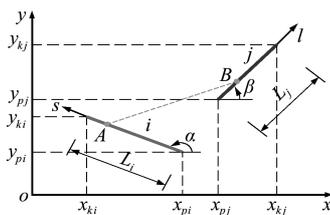
$$E[R_r^{(i)}] = \mu_r, \quad \text{Var}[R_r^{(i)}] = \gamma_r(L_i) \sigma_r^2 \quad (6, 7)$$



(a) 门式平面刚架



(b) 单元 i 的几何关系



(c) 单元 i 和 j 的几何关系

图 1 平面内任意分布的线性单元 i 和 j

Fig. 1 Geometry of arbitrarily situated planar linear elements i and j

式中 μ_r 和 σ_r^2 分别为随机场第 r 维分量的均值和点方差; $\gamma_r(L_i)$ 为随机场第 r 维分量的方差函数, 反映了局部平均特性的方差相对于点特性方差的衰减程度, 可以利用随机场的相关函数 $\rho_r(z)$ 来确定; $\rho_r(z)$ 为随机场第 r 维分量相距为 z 的两点之间的自相关函数, 简称相关函数, 反映了随机场的相关结构。

工程中比较常用的随机场相关结构类型包括三角型(T)、指数型(EXP)、二阶 AR 型(AR)和高斯型(G)等, 对应的相关函数和方差函数分别为^[20]

(1) 三角型

$$\rho_r(z) = \begin{cases} 1 - |z|/\theta_r & (|z| \leq \theta_r) \\ 0 & (|z| > \theta_r) \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma_r(L_i) = \begin{cases} 1 - L_i/(3\theta_r) & (L_i \leq \theta_r) \\ (\theta_r/L_i)[1 - \theta_r/(3L_i)] & (L_i > \theta_r) \end{cases} \quad (9)$$

式中 θ_r 为局部平均法的相关偏度。

(2) 指数型

$$\rho_r(z) = \exp(-2|z|/\theta_r) \quad (10)$$

$$\gamma_r(L_i) = \frac{\theta_r^2}{2L_i^2} \left[\frac{2L_i}{\theta_r} - 1 + \exp\left(-\frac{2L_i}{\theta_r}\right) \right] \quad (11)$$

(3) 二阶 AR 型

$$\rho_r(z) = (1 + 4|z|/\theta_r) \exp(-4|z|/\theta_r) \quad (12)$$

$$\gamma_r(L_i) = (\theta_r/2L_i) \left\{ 2 + \exp(-4L_i/\theta_r) - [3\theta_r/(4L_i)][1 - \exp(-4L_i/\theta_r)] \right\} \quad (13)$$

(4) 高斯型

$$\rho_r(z) = \exp(-\pi z^2/\theta_r^2) \quad (14)$$

$$\gamma_r(L_i) = [\theta_r^2/(\pi L_i^2)] \left[(\pi L_i/\theta_r) \text{erf}(\sqrt{\pi} L_i/\theta_r) + \exp(-\pi L_i^2/\theta_r^2) - 1 \right] \quad (15)$$

式中 $\text{erf}(\cdot)$ 为误差函数。

2.2 互相关函数与协方差矩阵

为了求出任意两个单元随机场离散变量之间的互协方差, 需要推导随机场局部平均间协方差矩阵的积分表达式。以图 1(c)所示门式平面框架中的单元 i 和 j 为例, 位于单元 i 上 A 点的随机场第 r 分量 R_r 与单元 j 上 B 点的随机场第 s 分量 R_s 之间的互相关函数为 $\rho_{rs}(z)$, 其中 z 为点 A 和点 B 之间的距离, 则随机场第 r 分量在单元 i 上的局部平均 $R_r^{(i)}$ 与随机场第 s 分量在单元 j 上的局部平均 $R_s^{(j)}$ 之间的互相关函数为

$$\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)}) = \frac{1}{L_i L_j} \int_0^{L_i} \int_0^{L_j} \rho_{rs}(z) dl ds \quad (16)$$

将 $ds = dx_i/\cos\alpha$ 和 $dl = dx_j/\cos\beta$ 代入式(16) 可得

$$\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)}) = \frac{1}{L_i L_j \cos\alpha \cdot \cos\beta} \int_{x_{pi}}^{x_{ki}} \int_{x_{pj}}^{x_{kj}} \rho_{rs}(z) dx_j dx_i \quad (17)$$

由式(17)可知,互相关函数 $\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)})$ 是关于 x_i 和 x_j 的二重积分函数。值得注意的是,当单元 i 和(或) j 平行于 y 轴时,可以对式(17)进行简化。当单元 i 平行于 y 轴时,将 $ds = dy_i$ 和 $dl = dx_j/\cos\beta$ 代入式(16)可得

$$\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)}) = \frac{1}{L_i L_j \cos\beta} \int_{y_{pi}}^{y_{ki}} \int_{x_{pj}}^{x_{kj}} \rho_{rs}(z) dx_j dy_i \quad (18)$$

当单元 j 平行于 y 轴时,将 $ds = dx_i/\cos\alpha$ 和 $dl = dy_j$ 代入式(16)可得

$$\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)}) = \frac{1}{L_i L_j \cos\alpha} \int_{x_{pi}}^{x_{ki}} \int_{y_{pj}}^{y_{kj}} \rho_{rs}(z) dy_j dx_i \quad (19)$$

当单元 i 和 j 都平行于 y 轴时,将 $ds = dy_i$ 和 $dl = dy_j$ 代入式(16)可得

$$\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)}) = \frac{1}{L_i L_j} \int_{y_{pi}}^{y_{ki}} \int_{y_{pj}}^{y_{kj}} \rho_{rs}(z) dy_j dy_i \quad (20)$$

根据互相关函数 $\rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)})$, 进而可以计算 $R_r^{(i)}$ 与 $R_s^{(j)}$ 之间的协方差为

$$\text{Cov}[R_r^{(i)}, R_s^{(j)}] = \sigma_r \sigma_s \rho(R_r^{(i)}, R_s^{(j)}) \quad (21)$$

式中 σ_r 和 σ_s 分别为随机场第 r 和第 s 分量的点标准差。

3 空间变异性结构的可靠度分析

在独立标准正态空间内,结构可靠指标 β 等于原点到极限状态面的最短距离,即

$$\beta = \sqrt{\xi^{*T} \xi^*} \quad (22)$$

且功能函数满足 $G(\xi^*) = 0$ (23)

式中 $\xi^* = [\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*]^T$ 为设计验算点,通过迭代公式(24)求得

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + s^{(k)} d^{(k)} \quad (24)$$

式中上标 k 和 $k+1$ 表示迭代步, $s^{(k)}$ 为移动步长,可以通过使式(25)所定义的价值函数取最小值来确定^[21]

$$m(\xi^{(k)}) = \frac{1}{2} \|\xi^{(k)}\|^2 + c_k |G(\xi^{(k)})| \quad (25)$$

$$c_k = \gamma (\|\xi^{(k)}\| / \|\nabla G(\xi^{(k)})\|) + \eta \quad (26)$$

且要求 $\gamma > 1.0$ 和 $\eta \geq 0$, 一般取 $\gamma = 2.0$ 和 $\eta = 10$ 。 $d^{(k)}$ 为移动方向向量,即

$$d^{(k)} = \frac{[(\nabla G_\xi)^T \xi^{(k)} - G(\xi^{(k)})] \nabla G_\xi}{\|\nabla G_\xi\|^2} - \xi^{(k)} \quad (27)$$

式中 功能函数梯度 $\nabla G_\xi = \nabla G(\xi^{(k)})$ 。

3.1 正态相关随机变量的处理

假设利用局部平均法将随机场离散为一组具

有相关性的正态随机向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 其中 $n = M \times N$ 为随机变量总数, M 为随机场维数, N 为随机场单元离散数。为了进行可靠度计算,需要将 \mathbf{x} 变换为独立标准正态分布随机向量 ξ ^[22], 两者之间的关系如下,

$$\xi = \mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{B} \quad (28)$$

式中 $\mathbf{T} = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n})$

$\mathbf{B} = [-\bar{y}_1/\sqrt{\lambda_1}, -\bar{y}_2/\sqrt{\lambda_2}, \dots, -\bar{y}_n/\sqrt{\lambda_n}]^T$ λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 和 \mathbf{A} 分别为 \mathbf{x} 的协方差矩阵 \mathbf{C}_x 的特征值和特征向量, \bar{y}_i 为不相关正态随机变量的均值,且有 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}}$ 。

对式(28)进行逆变换有

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} (\xi - \mathbf{B}) \quad (29)$$

由此可以得到从随机向量 \mathbf{x} 变换到随机向量 ξ 的雅克比矩阵 $\mathbf{J}_{\mathbf{x}, \xi}$ 为

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}, \xi} = \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \quad (30)$$

3.2 结构功能函数的梯度计算

已知原变量空间中的功能函数 $g(\mathbf{x})$, 根据 ξ 和 \mathbf{x} 之间的关系,可以确定梯度向量 $\nabla G(\xi)$ 和 $\nabla g(\mathbf{x})$ 之间存在以下关系。

$$\nabla G(\xi) = \mathbf{J}_{\mathbf{x}, \xi}^T \nabla g(\mathbf{x}) \quad (31)$$

功能函数 $g(\mathbf{x})$ 通常可以由广义抗力 \mathbf{R} 和广义荷载效应 \mathbf{S} 表示为

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad (32)$$

由于 \mathbf{R} 和 \mathbf{S} 都是 \mathbf{x} 的函数,所以梯度向量 $\nabla g(\mathbf{x})$ 为

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_R \nabla g_R(\mathbf{R}, \mathbf{S}) + \mathbf{J}_S \nabla g_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad (33)$$

式中 $\nabla g_R(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ 和 $\nabla g_S(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ 分别为 $g(\mathbf{x})$ 对 \mathbf{R} 和 \mathbf{S} 的梯度向量, $\mathbf{J}_R = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{J}_S = \partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{x}$ 分别是变换 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{x})$ 的雅克比矩阵。通常 $\nabla g_R(\mathbf{R}, \mathbf{S})$, $\nabla g_S(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ 和 \mathbf{J}_R 容易求解,而 \mathbf{J}_S 的计算比较困难,本文采用摄动随机有限元法进行求解。

根据摄动随机有限元法的控制方程可以求出结构的结点位移向量的均值和协方差分别为^[18,19]

$$E(\mathbf{a}) \approx \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_{II} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \text{Cov}(x_i, x_j) \quad (34,35)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^T) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_i \text{Cov}(x_i, x_j) \mathbf{a}_j^T$$

其中

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{K}}^{-1} (\mathbf{P}_i - \mathbf{K}_i \bar{\mathbf{a}}) \quad (36,37)$$

式中 \mathbf{K} , \mathbf{a} 和 \mathbf{P} 分别为结构整体刚度矩阵、结点位移列阵和荷载列阵, $(\bar{\cdot})$ 表示随机量 (\cdot) 在随机场离散变量 \mathbf{x} 的均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的值, $(\cdot)_i$ 表示 (\cdot) 对 x_i 的一阶偏导数在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的值, $(\cdot)_{ij}$ 表示 (\cdot) 对 x_i 和 x_j 的二阶混合偏导数在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的值, x_i 和 x_j 表示随机变量,包括结构的材料参数和外荷载等。

当利用节点位移来建立结构的功能函数时, $J_S = \partial S / \partial \mathbf{x}$ 可以由式 (37) 计算, 从而可以利用式 (31, 33) 计算功能函数梯度向量, 进而可以根据式 (22~27) 计算结构可靠指标。考虑空间变异性的框架结构可靠度分析方法的计算流程如图 2 所示。

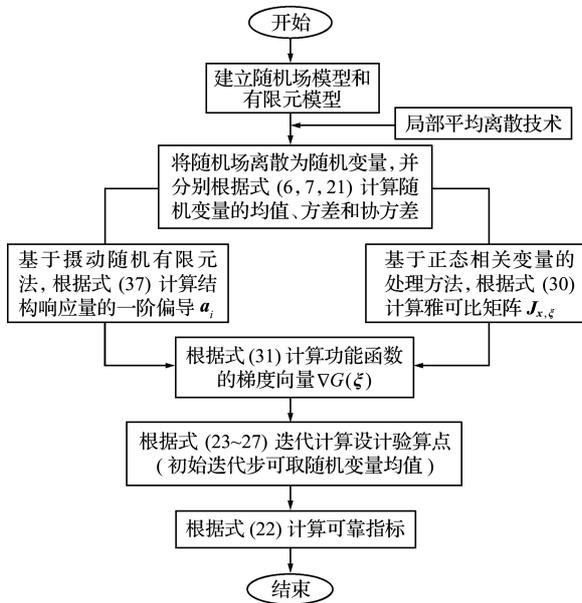


图 2 本文方法计算流程
Fig. 2 Flowchart of proposed method

4 对比分析与验证

4.1 门式刚架

某单跨平面框架的几何尺寸及荷载情况如图 3 所示, 已知柱和梁的截面面积 A_c 和 A_b 分别为 0.09 m^2 和 0.08 m^2 , 截面惯性矩 I_c 和 I_b 分别为 $6.7 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ 和 $1.067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, 集中荷载 F_1 和 F_2 分别为 300 kN 和 270 kN 。为了描述各构件的弹性模量 E 的空间随机性, 将 E 描述为空间坐标 (x, y) 的随机函数, 即 $E = \bar{E}(1 + k\lambda_c(x, y))$, 式中弹性模量的均值 $\bar{E} = 2.0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ 。常数 k 取为 0.1 , $\lambda_c(x, y)$ 为具有 0 均值的互不相关的标准正态分布的随机场, 假设 λ_c 的相关结构为三角形 (T)、指数型 (EXP)、二阶 AR 型 (AR) 及高斯型 (G) 四种比较常用的模式之一, 随机场的相关偏度为 θ_r 。结构单元划分与随机场单元划分一致。以

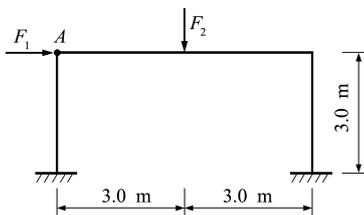


图 3 平面刚架的计算简图
Fig. 3 Sketch of planar frame

顶点 A 的水平位移建立功能函数 $g = 1.15 \bar{a} - a_d$, 其中 \bar{a} 为随机变量取均值时的顶点 A 水平位移值, a_d 为顶点 A 的水平位移值。用局部平均法离散随机场并用摄动随机有限元法计算结构可靠度 (本文方法), 将计算结果与蒙特卡洛随机有限元法 (MCS) 的计算结果进行相互校验。

4.1.1 相关结构类型和单元划分数影响

以随机场的相关偏度 $\theta_r = 3.0 \text{ m}$, 变异系数 $\delta = 0.1$ 为例, 分析单元划分数和随机场的相关结构类型对框架结构可靠指标的影响, 计算结果列入表 1, 其中 ϵ_{PM} 表示 MCS 与本文方法的相对误差。可靠指标随单元划分数收敛趋势如图 4 所示。为了兼顾 MCS 的计算精度和计算效率, 分析了抽

表 1 不同相关结构类型和单元划分数情况下的可靠指标

Tab. 1 Influences of correlation function types and meshed element numbers

单元数	相关结构类型	本文方法	MCS	$\epsilon_{PM}/\%$
4	T	2.459	2.425	1.40
	EXP	2.552	2.526	1.03
	AR	2.486	2.448	1.55
	G	2.449	2.408	1.70
8	T	2.383	2.345	1.62
	EXP	2.489	2.448	1.67
	AR	2.410	2.355	2.34
	G	2.367	2.319	2.07
12	T	2.429	2.391	1.59
	EXP	2.495	2.443	2.13
	AR	2.432	2.367	2.75
	G	2.413	2.357	2.38
16	T	2.449	2.387	2.60
	EXP	2.497	2.436	2.50
	AR	2.440	2.380	2.52
	G	2.428	2.374	2.27
20	T	2.456	2.389	2.80
	EXP	2.496	2.420	3.14
	AR	2.442	2.374	2.86
	G	2.431	2.357	3.14

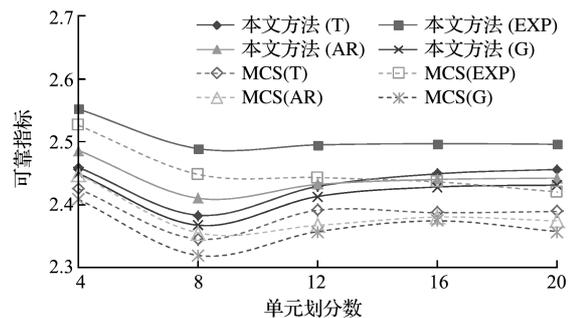


图 4 单元划分数对可靠指标收敛性的影响
Fig. 4 Influences of meshed element numbers on convergence of reliability index

样次数对可靠指标计算结果的影响,将 MCS 的抽样次数选取为 10 万次。

由表 1 可知,(1) 当单元划分数不同时,由本文方法与 MCS 计算得到的可靠指标之间的相对误差均控制在 3.5% 以内,说明本文方法的计算精度较高;(2) 当单元划分数相同时,随机场相关结构类型为 T,EXP,AR 和 G 时的可靠指标相差不大,符合局部平均法对相关结构类型不敏感的特点。此外,从图 4 可以看出,当相关结构类型相同时,结构可靠指标随着单元划分数的增大而逐渐收敛;当单元划分数不少于 12 时,计算结果基本收敛,与文献[23]在边坡稳定可靠性中有关局部平均法随机场单元划分的结论基本吻合。

4.1.2 相关偏度的影响

以单元划分数为 12,变异系数 $\delta = 0.1$ 为例,分析随机场的相关偏度对结构可靠指标的影响,计算结果列入表 2,可靠指标随相关偏度的变化趋势如图 5 所示。由表 2 可知,当相关偏度取不同值时,本文方法与 MCS 所得可靠指标的相对误差均控制在 3.1% 以内,再次说明本文方法的计算精度较高。从图 5 可以看出,当相关结构类型相同时,结构可靠指标随着随机场相关偏度的增大而降低,说明相关偏度的大小对结构可靠度有较大影响,与文

表 2 不同相关结构类型和相关偏度情况下的可靠指标

Tab.2 Influences of correlation function types and scales of fluctuation

相关偏度/m	相关结构类型	本文方法	MCS	$\epsilon_{PM}/\%$
1.5	T	3.039	2.950	3.02
	EXP	3.155	3.073	2.64
	AR	3.048	2.964	2.86
	G	2.993	2.903	3.11
3.0	T	2.429	2.391	1.59
	EXP	2.495	2.443	2.13
	AR	2.432	2.367	2.75
	G	2.413	2.357	2.38
4.5	T	2.121	2.088	1.59
	EXP	2.179	2.141	1.74
	AR	2.124	2.086	1.83
	G	2.105	2.074	1.47
6.0	T	1.950	1.928	1.11
	EXP	1.989	1.962	1.40
	AR	1.927	1.901	1.41
	G	1.909	1.889	1.06
7.5	T	1.756	1.740	0.87
	EXP	1.866	1.842	1.32
	AR	1.791	1.772	1.04
	G	1.763	1.751	0.68

献[24]有关曲边单元局部平均法的研究结论一致。

4.1.3 变异性的影响

以单元划分数为 12,随机场的相关偏度 $\theta_r = 3.0$ m 为例,分析随机场的变异性对结构可靠指标的影响,计算结果列入表 3,可靠指标与变异系数的变化趋势如图 6 所示。由表 3 可知,本文方法与 MCS 的相对误差随着变异系数的增大而增大,当 $\delta \leq 0.15$ 时,相对误差控制在 5.2% 以内;当 $\delta > 0.15$ 时,相对误差较大,主要原因在于摄动展开技术只适于小变异分析。此外,从图 6 可以看出,当相关结构类型相同时,结构可靠指标随着随机场变异系数的增大而降低,说明变异系数的大小对结构可靠度有较大影响。

4.1.4 计算效率对比

通过以上对比分析可知,本文方法与 MCS 的计算结果相吻合,说明本文方法具有较好的计算精度。取单元划分数为 12,变异系数 $\delta = 0.1$,相关

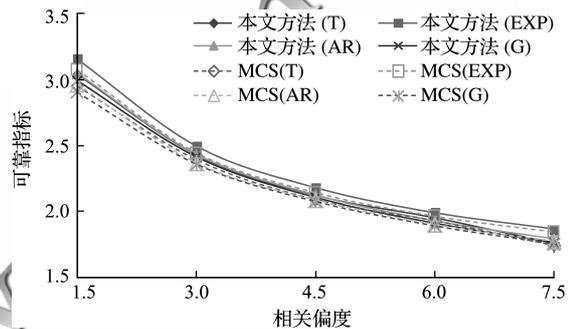


图 5 相关偏度对可靠指标的影响

Fig.5 Influences of scales of fluctuation on reliability index

表 3 不同相关结构类型和变异系数情况下的可靠指标

Tab.3 Influences of correlation function types and coefficients of variation

变异系数	相关结构类型	本文方法	MCS	$\epsilon_{PM}/\%$
0.05	T	4.857	4.805	1.09
	EXP	4.990	4.927	1.27
	AR	4.865	4.805	1.24
	G	4.826	4.790	0.74
0.10	T	2.429	2.391	1.59
	EXP	2.495	2.443	2.13
	AR	2.432	2.367	2.75
	G	2.413	2.357	2.38
0.15	T	1.619	1.550	4.43
	EXP	1.664	1.590	4.62
	AR	1.621	1.542	5.13
	G	1.608	1.532	4.97
0.20	T	1.214	1.121	8.37
	EXP	1.247	1.154	8.05
	AR	1.216	1.114	9.14
	G	1.206	1.102	9.47

结构类型为 T 时的可靠度计算为例,相关偏度分别取 1.5 m,4.5 m 和 7.5 m 时,本文方法和 MCS 的计算效率对比列入表 4。可以看出,MCS 按照统计方法计算失效概率,虽然不需要进行可靠度迭代计算,但是需进行大量抽样且每一组样本都要进行一次有限元分析计算。此外,可靠指标越大,MCS 所需的抽样次数越多,计算耗时越久。而本文方法仅需要进行 1 次有限元分析计算及 4 次左右可靠度迭代计算,计算耗时非常少且稳定。由表 4 结果可知,本文方法的计算耗时大概只需 MCS 的 1/100,说明本文方法具有较高的计算效率。

4.2 三层三跨刚架

某三层三跨刚架如图 7 所示,梁的截面面积 A_b 和惯性矩 I_b 分别为 0.15 m^2 和 $3.1 \times 10^{-3} \text{ m}^4$,柱的截面面积 A_c 和惯性矩 I_c 分别为 0.16 m^2 和 $2.1 \times 10^{-3} \text{ m}^4$,水平集中荷载 $F=34.0 \text{ kN}$ 。为了描述各构件的弹性模量 E 及竖向均布荷载 q 的空间随机性,将 E 和 q 描述为空间坐标 (x, y) 的随机函数,即 $E = \bar{E}(1 + k_1 \lambda_e(x, y))$ 和 $q = \bar{q}(1 + k_2 \lambda_q(x, y))$,其中 $\bar{E} = 2.2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\bar{q} = 10.0 \text{ kN/m}$,常数 k_1 和 k_2 均取为 0.1, $\lambda_e(x, y)$ 和 $\lambda_q(x, y)$ 为具有 0 均值的互不相关的标准正态分布的随机场。以顶点 A 的水平位移建立功能函数 $g = 1.06 \bar{a} - a_d$,其中 \bar{a} 为随机变量取均值时的顶点 A 水平位移值, a_d 为顶点 A 的水平位移值。

假设 λ_e 和 λ_q 的相关结构分别取三角型(T)、指数型(EXP)、二阶 AR 型(AR)及高斯型(G),各随

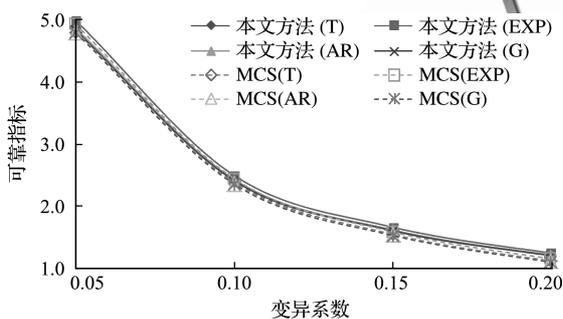


图 6 变异系数对可靠指标的影响
Fig. 6 Influences of variabilities on reliability index

表 4 不同方法的计算精度和计算效率的对比
Tab. 4 Comparison of computational efficiency

相关偏度 /m	可靠指标		有限元分析次数/次		可靠度迭代计算次数/次		计算耗时 /s	
	本文方法	MCS	本文方法	MCS	本文方法	MCS	本文方法	MCS
1.5	3.039	2.950	1	20 万	3	0	8	1440
4.5	2.121	2.088	1	10 万	4	0	10	720
7.5	1.756	1.740	1	5 万	3	0	8	360

机场的相关偏度为 $\theta_1 = \theta_2$, 分别取 6.0 m,7.5 m 和 9.0 m 时,利用本文方法和 MCS 计算的可靠指标结果列入表 5。可以看出,对于三层三跨刚架结构,当相关偏度取不同值时,本文方法与 MCS 所得可靠指标的相对误差均控制在 5%以内,说明本文方法具有较高的计算精度和较好的适用性。此外,结构可靠指标随着随机场相关偏度的增大而降低,再次说明相关偏度的大小对结构可靠度有较大影响。

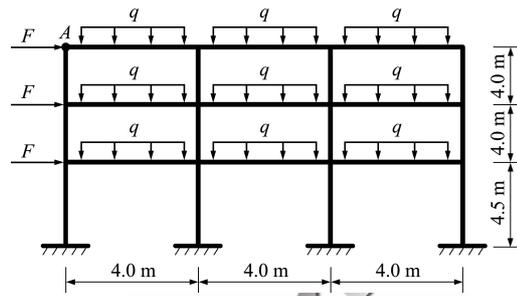


图 7 三层三跨刚架的计算简图
Fig. 7 Sketch of three-layer three-span planar frame

表 5 不同相关结构类型和相关偏度情况下的可靠指标

Tab. 5 Influences of correlation function types and scales of fluctuation

相关偏度/m	相关结构类型	本文方法	MCS	$\epsilon_{PM} / \%$
6.0	T	1.294	1.244	4.00
	EXP	1.261	1.231	2.43
	AR	1.317	1.255	4.90
	G	1.340	1.282	4.51
7.5	T	1.095	1.060	3.28
	EXP	1.126	1.084	3.96
	AR	1.119	1.078	3.74
	G	1.128	1.082	4.26
9.0	T	0.966	0.939	2.81
	EXP	1.021	0.990	3.14
	AR	1.003	0.966	3.89
	G	0.982	0.956	2.80

5 结 论

结合随机场离散的局部平均理论和随机响应分析的摄动随机有限元法,提出了一种能够有效考虑参数空间变异性的框架结构可靠度分析方法,并定量分析了参数的空间变异性对框架结构可靠度的影响,结论如下。

- (1) 随机场离散的局部平均理论对相关结构类型不敏感。
- (2) 随机场相关偏度和变异性对框架结构可靠度影响较大,随着随机场相关偏度的增大或变异性的减小,框架结构的可靠指标逐渐增大。
- (3) 所提出的考虑空间变异性的框架结构可

可靠度分析方法对于小变异(如变异系数 $\delta \leq 0.15$) 情况下的框架结构可靠度分析有较好的适用性。

(4) 所提出的考虑空间变异性的框架结构可靠度分析方法的计算耗时大概只需 MCS 的 1/100, 具有较好的计算精度和计算效率。

(5) 基于本文方法,可以进一步开展灵敏度分析,从而遴选考虑空间变异性结构可靠指标的关键影响因素,为框架结构的设计提供科学依据。

参考文献(References):

- [1] Haukaas T, Scott M H. Shape sensitivities in the reliability analysis of nonlinear frame structures [J]. *Computers & Structures*, 2006, **84**(15-16): 964-977.
- [2] Hong H P, Hong P, Wang W. Reliability of steel frames designed in accordance with the national building code of Canada seismic provisions and its implication in codified design [J]. *Engineering Structures*, 2010, **32**(5): 1284-1291.
- [3] 刘小渝, 王俊杰. 框架可靠度计算的新方法[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2007, **26**(4): 14-17. (LIU Xiao-yu, WANG Jun-jie. New method for frame reliability [J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University(Natural Science)*, 2007, **26**(4): 14-17. (in Chinese))
- [4] 张望喜, 刘有, 程超男. 考虑施工误差影响的 RC 框架结构可靠性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2017, **44**(7): 69-77. (ZHANG Wang-xi, LIU You, CHENG Chao-nan. Reliability analysis of reinforced concrete frame structure considering the influence of construction error [J]. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*, 2017, **44**(7): 69-77. (in Chinese))
- [5] 吕大刚, 李晓鹏. 钢框架结构抗震可靠度的概率重要性分析[J]. 建筑结构学报, 2007, **28**(s1): 156-164, 178. (LÜ Da-gang, LI Xiao-peng. Probability importance analysis of seismic reliability for steel frame structures[J]. *Journal of Building Structures(Supplementary Issue)*, 2007, **28**(s1): 156-164, 178. (in Chinese))
- [6] 苏成, 李鹏飞, 韩大建. 结构可靠度计算的 Neumann 展开响应面法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2009, **37**(9): 13-17, 23. (SU Cheng, LI Peng-fei, HAN Da-jian. Neumann-expansion response surface method for calculating structure reliability [J]. *Journal of South China University of Technology(Natural Science Edition)*, 2009, **37**(9): 13-17, 23. (in Chinese))
- [7] 吕大刚, 贾明明, 李刚. 基于均匀设计响应面法的钢框架结构抗震可靠度分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, **43**(4): 1-5. (LÜ Da-gang, JIA Ming-ming, LI Gang. Seismic reliability analysis of steel frame structures based on uniform design response surface method [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2011, **43**(4): 1-5. (in Chinese))
- [8] 刘春华, 秦权. 基于随机有限元的框架结构可靠度分析[J]. 工程力学, 1996(s1): 295-299. (LIU Chun-hua, QIN Quan. Reliability analysis of frame structures based on stochastic finite element method [J]. *Engineering Mechanics*, 1996(s1): 295-299. (in Chinese))
- [9] Knabe W, Przewłócki J, Różyński G. Spatial averages for linear elements for two-parameter random field [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1998, **13**(3): 147-167.
- [10] 朱位秋, 任永坚. 随机场的局部平均与随机有限元 [J]. 航空学报, 1986, **7**(6): 604-611. (ZHU Wei-qiu, REN Yong-jian. Local average of random fields and stochastic finite element method [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1986, **7**(6): 604-611. (in Chinese))
- [11] 王庆, 姚竞争. 板壳结构非线性随机有限元法研究 [J]. 工程力学, 2013, **30**(12): 286-292. (WANG Qing, YAO Jing-zheng. Stochastic finite element method for analyzing nonlinear shell structures with random parameters [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(12): 286-292. (in Chinese))
- [12] Santoso A M, Phoon K K, Quek T. Effects of soil spatial variability on rainfall-induced landslides [J]. *Computers & Structures*, 2011, **89**(11-12): 893-900.
- [13] Cho S E. Effects of spatial variability of soil properties on slope stability [J]. *Engineering Geology*, 2007, **92**(3-4): 97-109.
- [14] 韩宪军. 弹模随机场对地下洞室可靠度计算结果的影响 [J]. 西安科技大学学报, 2007, **27**(2): 214-217, 223. (HAN Xian-jun. Effect of elastic modules random field of surrounding rocks on reliability calculation of underground chamber [J]. *Journal of Xi'an University of Science and Technology*, 2007, **27**(2): 214-217, 223. (in Chinese))
- [15] 龚勳, 张冬梅, 黄宏伟. 二维空间随机场的浅基础极限承载力可靠度分析 [J]. 地下空间与工程学报, 2012, **8**(s2): 1676-1679. (GONG Xun, ZHANG Dong-mei, HUANG Hong-wei. Reliability analysis of allowable pressure on shallow foundation based on 2D random field [J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2012, **8**(s2): 1676-1679. (in Chinese))
- [16] 洪昌华, 龚晓南. 不排水强度的空间变异性及单桩承载力可靠性分析 [J]. 土木工程学报, 2000, **33**(3): 66-70. (HONG Chang-hua, GONG Xiao-nan. Spatial variability of undrained strength and reliability analysis of single pile [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2000, **33**(3): 66-70. (in Chinese))
- [17] 邓志平, 牛景太, 潘敏, 等. 考虑地层变异性及土体参数空间变异性的边坡可靠度全概率设计方法 [J]. 岩土工程学报, 2019, **41**(6): 1083-1090. (DENG Zhi-ping, NIU Jing-tai, PAN Min, et al. Reliability design method of slope based on full probability considering spatial variability of soil parameters and soil body parameters [J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 2019, **41**(6): 1083-1090. (in Chinese))

- ping, NIU Jing-tai, PAN Min, et al. Full probabilistic design method for slopes considering geological uncertainty and spatial variability of soil parameters [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2019, **41**(6):1083-1090. (in Chinese))
- [18] Yang L F, Leung A Y T, Li Q S. The stochastic finite segment in the analysis of the shear-lag effect on box-girders [J]. *Engineering Structures*, 2001, **23**(11): 1461-1468.
- [19] 杨绿峰, 高兑现, 李桂青. 随机结构在随机激励下的二阶摄动随机势能泛函及其应用[J]. *应用力学学报*, 1999, **16**(4): 35-39. (YANG Lu-feng, GAO Dui-xian, LI Gui-qing. Stochastic functional of potential energy developed for stochastic structures under stochastic stimulus [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1999, **16**(4): 35-39. (in Chinese))
- [20] Fenton G A, Vanmarcke E H. Simulation of random fields via local average subdivision [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, **116**(8):1733-1749.
- [21] Zhang Y, Der Kiureghian A. Two improved algorithms for reliability analysis[A]. Proceedings of the 6th IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems[C]. 1994.
- [22] 吕大刚. 基于线性化 Nataf 变换的一次可靠度方法[J]. *工程力学*, 2007, **24**(5):79-86, 124. (LÜ Da-gang. First order reliability method based on linearized Nataf transformation [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(5):79-86, 124. (in Chinese))
- [23] 傅旭东, 茜平一, 刘祖德. 边坡稳定可靠性的随机有限元分析[J]. *岩土力学*, 2001, **22**(4):413-418. (FU Xu-dong, QIAN Ping-yi, LIU Zu-de. The reliability analysis for slope stability by perturbation stochastic finite element method [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2001, **22**(4):413-418. (in Chinese))
- [24] 苏成, 徐瑞, 范学明. 二维随机场离散的曲边单元局部平均法[J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2008, **36**(3):104-107, 120. (SU Cheng, XU Rui, FAN Xue-ming. Local average method based on curved-side elements for discretization of 2D random fields [J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2008, **36**(3): 104-107, 120. (in Chinese))

Reliability analysis method of frame structures considering spatial variability

LIU Jing-min¹, YANG Lu-feng², YU Bo^{*2}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China;
2. Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Reduction and Engineering Safety, Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education, School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Spatial variability is an inherent property of parameters, which has an important influence on the stochastic response and reliability of engineering structures. In this paper, a reliability method for planar frame structures considering spatial variability of parameters was proposed based on the local average theory and the perturbation stochastic finite element method (PSFEM). Meanwhile, the influence rule of spatial variability of parameters on structural reliability was quantitatively analyzed. Considering the spatial variability of random factors, the continuous random field was discretized into a group of random variables by using the local average theory of two-dimensional linear random field discretization, while the double integral expression of local average covariance matrix of the random field was established by theoretical derivation. Then the stochastic structural response and its gradient vector to the basic random variables were analyzed by using the PSFEM, and a reliability method for planar frame structures considering spatial variability of parameters was proposed by calculating the structural reliability index utilizing the gradient optimization method of reliability analysis. Analysis results show that the method proposed in this paper has high accuracy and efficiency. Moreover, the local average theory of random field discretization is insensitive to the correlation function types, and the reliability index of the structure decreases gradually with the increase of the skewness and variability, which shows that the influence of spatial variability of parameters on structural reliability cannot be ignored.

Key words: reliability; spatial variability; random field; local average; stochastic finite element method

引用本文/Cite this paper:

刘敬敏, 杨绿峰, 余波. 考虑空间变异性的框架结构可靠度分析方法[J]. *计算力学学报*, 2020, **37**(6): 677-684.

LIU Jing-min, YANG Lu-feng, YU Bo. Reliability analysis method of frame structures considering spatial variability [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(6): 677-684.