

基于对偶变量变分原理的完整约束系统保辛算法

满淑敏, 高 强*, 钟万勰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 工程力学系, 大连 116023)

摘 要: 基于对偶变量变分原理, 选择积分区间两端位移为独立变量, 构造了解完整约束哈密顿动力系统的高阶保辛算法。首先, 利用拉格朗日多项式对作用量中的位移、动量及拉格朗日乘子进行近似; 然后, 对作用量中不包含约束的积分项采用 Gauss 积分近似, 对作用量中包含约束的积分项采用 Lobatto 积分近似, 从而得到近似作用量; 最后, 在此近似作用量的基础上, 利用对偶变量变分原理, 将求解完整约束哈密顿动力系统问题转化为一组非线性方程组的求解。算法具有保辛性和高阶收敛性, 能够在位移的插值点处高精度地满足完整约束。算法的收敛阶数及数值性质通过数值算例验证。

关键词: 保辛; 完整约束; 哈密顿系统; 对偶变量

中图分类号: O241

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2020)06-0655-06

1 引 言

哈密顿系统的一个主要性质是其相流保持辛结构^[1,2], 因此其近似积分的数值方法也应该具有保辛的性质^[3]。在完整约束哈密顿动力系统中, 约束的存在给数值积分带来了许多问题。如一些传统算法在处理完整约束系统时, 约束不是直接施加, 而是由等价的加速度约束所代替。在这个过程中, 数值积分带来的误差会使得结果无法满足系统原有的约束条件, 导致硬曲面下沉这种不真实现象的产生。为解决这类误差, 引入了复原力的概念, 但这类任意添加的参数必须要根据每一个计算过程进行调整, 并要引入人工的能量损失。对于高度受限的系统, 这类损失在最终所生成的动力系统中将占据支配作用^[4]。而保辛算法能保持系统的固有特性, 其数值结果具有能量和动量守恒等特点^[5,6]。因此, 研究完整约束系统的保辛算法具有重要意义。

变分积分法是构造保辛算法的一类重要手段^[7,8]。在一类变量表示的拉格朗日体系内, 利用哈密顿原理, 文献^[7,9]通过对作用量进行近似, 给出了构造保辛算法的通用方法。文献^[10]讨论了积分点个数与广义位移近似多项式阶数不相同算法

的收敛阶数。在完整约束系统中, 为提高算法精度, Wenger 等^[11]同时使用 Gauss 积分和 Lobatto 积分, 得到一种高精度的 Galerkin 变分积分法。

上述保辛算法都是基于拉格朗日函数构造的, 但实际有些问题只能获得哈密顿函数, 而无法给出拉格朗日函数。此时, 保辛算法的构造基于对偶变量变分原理。在无约束哈密顿系统中, 文献^[12-15]基于两种不同的对偶变量变分原理, 通过选取不同的独立变量, 分别构造了四种不同类型的高阶保辛算法。这类保辛算法只需哈密顿函数便可实施, 拓宽了保辛算法的应用领域。

本文从哈密顿函数表示的对偶变量变分原理出发, 研究完整约束哈密顿动力系统的保辛算法。首先, 引入拉格朗日乘子, 得到包含完整约束方程的对偶变量变分原理; 然后, 选取积分区间两端位移为独立变量, 基于变分原理的一种离散化形式, 得到能够在位移插值点处高精度满足完整约束的高阶保辛算法。

2 完整约束哈密顿系统的基本方程和对偶变量变分原理

设哈密顿动力系统位置坐标由 d 维向量 $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_d\}^T$ 表示, d 维位置坐标受到 $c < d$ 个完整约束

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \{g_1(\mathbf{q}), g_2(\mathbf{q}), \dots, g_c(\mathbf{q})\}^T = \mathbf{0} \quad (1)$$

哈密顿原理表明, 系统的运动方程可由变分方程 (2) 导出,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} [L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}] dt, \quad \delta S = 0 \quad (2)$$

收稿日期: 2019-11-19; 修改稿收到日期: 2020-01-10.

基金项目: 国家自然科学基金 (11972107; 91748203); 中央高校基本科研业务费专项资金 (DUT2019TD37) 资助项目.

作者简介: 高 强* (1978-), 男, 教授, 博士生导师
(E-mail: qgao@dlut.edu.cn).

式中 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为不考虑约束时系统的拉格朗日函数, $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_c\}^T$ 为拉格朗日乘子组成的向量。

方程(2)为拉格朗日体系下,仅采用一类变量表示的变分原理。若引入动量 $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$, 对拉格朗日函数的 $\dot{\mathbf{q}}$ 进行勒让德变换,并定义哈密顿函数

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3)$$

则由哈密顿函数表示的对偶变量变分原理为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{g}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}] dt, \delta S = 0 \quad (4)$$

完成方程(4)的变分得到

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_0}^{t_1} [(\delta \mathbf{q})^T (-\dot{\mathbf{p}} - \partial H / \partial \mathbf{q} - \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}) + \\ & (\delta \mathbf{p})^T (\dot{\mathbf{q}} - \partial H / \partial \mathbf{p}) - (\delta \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{g}(\mathbf{q})] dt + \\ & \mathbf{p}^T(t_1) \delta \mathbf{q}(t_1) - \mathbf{p}^T(t_0) \delta \mathbf{q}(t_0) \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{g}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$ 。根据式(5),如果积分区间两端位移给定,则变分原理导出系统的运动方程为 $\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q} - \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = 0$ (6) 如果系统的运动方程提前满足,则作用量仅仅是时间区间左右两端位置坐标的函数,即

$$\delta S = \mathbf{p}^T(t_1) \delta \mathbf{q}(t_1) - \mathbf{p}^T(t_0) \delta \mathbf{q}(t_0) \quad (7)$$

方程(7)对应了 $\mathbf{q}(t_0)$, $\mathbf{p}(t_0)$ 和 $\mathbf{q}(t_1)$, $\mathbf{p}(t_1)$ 之间的一个正则变换

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t_0) &= -\partial S[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{q}(t_1)] / [\partial \mathbf{q}(t_0)] \\ \mathbf{p}(t_1) &= \partial S[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{q}(t_1)] / [\partial \mathbf{q}(t_1)] \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)可用于构造数值算法。本文将以方程(8)为出发点,构造完整约束哈密顿动力系统的保辛算法。

3 完整约束哈密顿系统的保辛算法

设时间步长为 η , 在积分区间 $[0, \eta]$ 上,利用拉格朗日多项式对位移、动量和拉格朗日乘子分别进行近似,插值点取 Lobatto 积分的积分点^[16],插值阶次分别为 n, m 和 z 。取积分区间两端位移为独立变量,则近似位移、动量和拉格朗日乘子的表达式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &\approx \mathbf{Q}(t) = N_0(t) \mathbf{q}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} N_k(t) \bar{\mathbf{q}}_k + N_n(t) \mathbf{q}_n \\ \mathbf{p}(t) &\approx \mathbf{P}(t) = \sum_{k=0}^m M_k(t) \bar{\mathbf{p}}_k \\ \boldsymbol{\lambda}(t) &\approx \boldsymbol{\Lambda}(t) = \sum_{k=0}^z Z_k(t) \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ 和 $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}(\eta)$ 为区间两端位移, $\bar{\mathbf{q}}_k$, $\bar{\mathbf{p}}_k$ 和 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_k$ 分别为位移、动量和拉格朗日乘子在第 $k+1$ 个插值点处的值, $N_k(t)$, $M_k(t)$ 和 $Z_k(t)$ 为拉格

朗日多项式,可表示为

$$N_k(t) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{t - \tau_i^n \eta}{\tau_k^n \eta - \tau_i^n \eta} \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (10)$$

$$M_k(t) = \prod_{i=0, i \neq k}^m \frac{t - \tau_i^m \eta}{\tau_k^m \eta - \tau_i^m \eta} \quad (k=0, 1, \dots, m) \quad (11)$$

$$Z_k(t) = \prod_{i=0, i \neq k}^z \frac{t - \tau_i^z \eta}{\tau_k^z \eta - \tau_i^z \eta} \quad (k=0, 1, \dots, z) \quad (12)$$

式中 τ_i^n , τ_i^m 和 τ_i^z 为插值阶数分别为 n, m 和 z 时, 区间 $[0, 1]$ 上第 $i+1$ 个插值点的位置。

将式(9)代入式(4),可得

$$S \approx S_d(\mathbf{q}_0, \bar{\mathbf{q}}_1, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{n-1}, \mathbf{q}_n; \bar{\mathbf{p}}_0, \dots, \bar{\mathbf{p}}_m; \bar{\boldsymbol{\lambda}}_0, \dots, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_z) = \int_0^\eta [\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{Q}} - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})] dt - \int_0^\eta \mathbf{g}^T(\mathbf{Q}) \boldsymbol{\Lambda} dt \quad (13)$$

然后,选取适当的数值积分方法近似式(13)的积分。其中,第一项为不包含约束的积分项,为保证计算精度,使用 Gauss 积分,积分点个数、积分点位置及权重系数分别为 g, t_j 和 w_j ; 第二项为包含约束的积分项,为保证数值解具有刚性精度,积分点应当包含区间端点^[7,17],因此选取 Lobatto 积分,积分点个数、积分点位置及权重系数分别为 $\tilde{g}, \tilde{t}_j$ 和 $\tilde{w}_j$ 。执行数值积分,则近似作用量为

$$\begin{aligned} S \approx S_d(\mathbf{q}_0, \bar{\mathbf{q}}_1, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{n-1}, \mathbf{q}_n; \bar{\mathbf{p}}_0, \dots, \bar{\mathbf{p}}_m; \bar{\boldsymbol{\lambda}}_0, \dots, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_z) = \\ \sum_{j=1}^g w_j \{ \mathbf{P}^T(t_j) \dot{\mathbf{Q}}(t_j) - H[\mathbf{Q}(t_j), \mathbf{P}(t_j)] \} - \\ \sum_{j=1}^{\tilde{g}} \tilde{w}_j \mathbf{g}^T[\mathbf{Q}(\tilde{t}_j)] \boldsymbol{\Lambda}(\tilde{t}_j) \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(7),近似作用量仅为积分区间两端位移 $\mathbf{q}_0$ 和 $\mathbf{q}_n$ 的函数,对近似作用量变分可得

$$\partial S_d / \partial \bar{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (15)$$

$$\partial S_d / \partial \bar{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad (i=0, 1, \dots, m) \quad (16)$$

$$\partial S_d / \partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i = \mathbf{0} \quad (i=0, 1, \dots, z) \quad (17)$$

同时,根据正则变换(8)可得

$$\partial S_d / \partial \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}, \partial S_d / \partial \mathbf{q}_n - \mathbf{p}_m = \mathbf{0} \quad (18)$$

位移、动量和拉格朗日乘子近似时,插值点为 Lobatto 积分的积分点,包含约束的积分项使用 Lobatto 积分。因此,当 Lobatto 积分点个数与位移和拉格朗日乘子插值点的个数相同时,即 $z = n = \tilde{g} - 1$ 时,式(14)最后一项的插值点与积分点重合。将式(9)的最后一项代入式(14)的最后一项,同时注意到拉格朗日多项式具有以下性质

$$Z_k(t_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases} \quad (19)$$

则式(14)的最后一项为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\tilde{g}} \tilde{\omega}_j \mathbf{g}^T[\mathbf{Q}(\tilde{t}_j)] \mathbf{A}(\tilde{t}_j) = \\ \sum_{j=1}^{\tilde{g}} \tilde{\omega}_j \mathbf{g}^T[\mathbf{Q}(\tilde{t}_j)] \sum_{k=0}^z Z_k(\tilde{t}_j) \bar{\lambda}_k \stackrel{z=n=\tilde{g}-1}{=} \\ \sum_{j=1}^{\tilde{g}} \sum_{k=1}^{\tilde{g}} \tilde{\omega}_j \mathbf{g}^T[\mathbf{Q}(\tilde{t}_j)] Z_k(\tilde{t}_j) \bar{\lambda}_k \stackrel{Z_k(\tilde{t}_j)=\delta_{kj}}{=} \\ \sum_{j=1}^{\tilde{g}} \tilde{\omega}_j \mathbf{g}^T[\mathbf{Q}(\tilde{t}_j)] \bar{\lambda}_j \end{aligned} \quad (20)$$

因此,近似作用量 S_d 对 $\bar{\lambda}_i$ 求导可得

$$\frac{\partial S_d}{\partial \bar{\lambda}_0} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial S_d}{\partial \bar{\lambda}_i} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial S_d}{\partial \bar{\lambda}_n} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_n) = \mathbf{0} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (21)$$

方程(21)为约束方程在位移插值点处的表达式。需要注意的是,由于初值 $\mathbf{q}_0$ 已知,初始点处的约束方程 $\mathbf{g}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ 自动满足,因此,需要另外补充 c 个方程。本文使用积分区间右端点处的速度约束作为补充方程。将约束方程(1)对时间求导,并利用式(6)可得右端点处的速度约束为

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}_n) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) = \mathbf{0} \quad (22)$$

至此,求解方程组(15,16,18,21,22)便可得到完整约束哈密顿动力系统的解。本文采用牛顿迭代法求解。由于上述非线性方程组由对偶变量变分原理导出,因此算法为保辛算法。

4 数值算例

通过两个算例分析保辛算法的数值性质。数值算例在 64 位计算机和 64 位操作系统下完成,程序使用 Fortran 实现,采用四倍精度。

算例 1 考虑三维球面摆在非线性势能场中的运动。三维球面摆摆长 $l = 1.0 \text{ m}$, 质量 $m = 1.0 \text{ kg}$, 位移与动量分别为 $\mathbf{q} = \{x, y, z\}^T$ 和 $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$, 系统哈密顿函数和约束方程为

$$H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m - mg \sin(z) \quad (23)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (24)$$

系统初始状态为

$$\mathbf{q}(0) = \{0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}^T, \mathbf{p}(0) = \{0.6, 0, 0\}^T \quad (25)$$

大量数值结果表明,当位移和动量的插值阶次分别为 n 和 m 时,算法所需最少 Gauss 积分点个数为 $g > \max.(n, m)$, 而当 $g \leq \max.(n, m)$ 时,由于在牛顿迭代求解过程中雅可比矩阵奇异,因此不能求解。

表 1 给出了位移和动量分别采用不同插值阶次,且 Gauss 积分点个数 $g = \max.(n, m) + 1$ 时,算法的收敛阶数 s 。本文讨论的是哈密顿系统的积

分,由于哈密顿系统的哈密顿函数是守恒量,因此使用哈密顿函数误差计算算法阶数。设积分步长为 η , 系统真实哈密顿数值为 H_0 , 数值积分在 $k\eta$ 时刻得到的哈密顿值为 H_k , 则有

$$\bar{e}_k = (H_k - H_0)/H_0, \quad e = \max.(|\bar{e}_k|) \quad (26)$$

式中 $\bar{e}_k$ 为 $k\eta$ 时刻得到的哈密顿函数相对误差, e 为哈密顿函数的全局误差。如果采用两个不同的时间步长 η_1 和 η_2 进行积分,积分结果的全局误差分别为 e_1 和 e_2 , 则算法的收敛阶数 s 为

$$s = \frac{\log(e_1) - \log(e_2)}{\log(\eta_1) - \log(\eta_2)} \quad (27)$$

由表 1 可知,算法收敛阶数 s 满足如下规律,

$$s = \begin{cases} \min.(2n, 2m) & (n \neq m+1) \\ \min.(2n, 2m+2) & (n = m+1) \end{cases} \quad (28)$$

可见,位移和动量插值阶次的最佳搭配方案为 $n = m + 1$, 此时算法的收敛阶数和计算效率最高。表 2 给出了 m 和 g 取不同值,且 $n = m + 1$ 时,算法的收敛阶数。由表 2 可知,仅改变 g 的值不会改变算法的收敛阶数。综合表 1 和表 2,位移的插值阶次 n 、动量的插值阶次 m 以及 Gauss 积分点个数 g 的最佳搭配方案为 $m = n - 1 = g - 2$ 。此时,算法的收敛阶数为 $s = 2m + 2$ 。

表 1 $g = \max.(n, m) + 1$, 且 n 和 m 取不同值时保辛算法的收敛阶数

Tab. 1 Order of the symplectic algorithm for different n and m with $g = \max.(n, m) + 1$

s	n							
	1	2	3	4	5	6	7	8
m	1	2	4	2	2	2	2	2
	2	2	4	6	4	4	4	4
	3	2	4	6	8	6	6	6
	4	2	4	6	8	10	8	8
	5	2	4	6	8	10	12	10
	6	2	4	6	8	10	12	14
	7	2	4	6	8	10	12	14
	8	2	4	6	8	10	12	14

表 2 $n = m + 1$, 且 n, m 和 g 取不同值时保辛算法的收敛阶数

Tab. 2 Order of the symplectic algorithm for different n, m and g with $n = m + 1$

s	g								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	—	—	4	4	4	4	4	4
	2	—	—	—	6	6	6	6	6
	3	—	—	—	—	8	8	8	8
	4	—	—	—	—	—	10	10	10
	5	—	—	—	—	—	—	12	12
	6	—	—	—	—	—	—	—	14
	7	—	—	—	—	—	—	—	—

图1为三维球面摆位移、动量、拉格朗日乘子以及完整约束的数值结果。算法参数 $m=n-1=g-2=1$, 积分步长 $\eta=1/2^3$, 积分总时长为 200 s。从图1可以看出, 位移、动量和拉格朗日乘子的数值结果保持了系统固有的周期性, 且高精度地满足完整约束。图2为积分步长为 $\eta=1/2$ 时, 两种不同参数的算法求得的哈密顿函数的相对误差 e 。图2(a)对应 $m=n-1=g-2=1$, 图2(b)对应 $m=n-1=g-2=6$ 。可见哈密顿函数虽不完全守恒, 但仅呈现出幅度很小的周期变化。

算例2 考虑一弹簧连杆装置。两个弹性系数为 k , 可以在光滑水平面上自由振动的弹簧分别将一端固定, 另一端连接半径为 r 、质量为 M 的光滑圆环轨道, 轨道上各放置一质量为 m 的小球, 两球在轨道中运动, 同时又由一长为 D 的轻质细杆相连。两弹簧原长均为 l , 振动方向在同一直线上, 固定端相距 $2L$ 。建立图3所示坐标系, 系统位移为 $\mathbf{q} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, O_1, O_2\}^T$, 动量为 $\mathbf{p} = \{p_{x_1}, p_{y_1}, p_{x_2}, p_{y_2}, p_{O_1}, p_{O_2}\}^T$ 。其中 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 分别为左右两侧小球的位置坐标, O_1 和 O_2 分别为左右两侧轨道圆心的 x 轴坐标。系统的哈密顿函数

及约束方程为

$$H = (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2)/2m + (p_{O_1}^2 + p_{O_2}^2)/2M + k(L-l-r+O_1)^2/2 + k(L-l-r-O_2)^2/2 \quad (29)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{cases} (x_1 - O_1)^2 + y_1^2 - r^2 \\ (x_2 - O_2)^2 + y_2^2 - r^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - D^2 \end{cases} = \mathbf{0} \quad (30)$$

系统参数取 $M=1.5 \text{ kg}$, $m=1.0 \text{ kg}$, $k=0.6 \text{ N/m}$, $L=1.0 \text{ m}$, $l=0.4 \text{ m}$, $r=0.2 \text{ m}$, $D=0.8 \text{ m}$, 初值选取

$$\mathbf{q}(0) = \{-0.1, 0, 0.7, 0, -0.3, 0.5\}^T$$

$$\mathbf{p}(0) = \{0, 0.05, 0, -0.05, 0, 0\}^T \quad (31)$$

数值结果表明, 算法参数的最佳搭配方案为 $m=n-1=g-2$, 此时, 算法阶数为 $s=2m+2$ 。

图4给出了左右两侧小球的运动轨迹。算法参数满足最佳搭配方案。*表示 $m=1$ 且 $\eta=1/2$

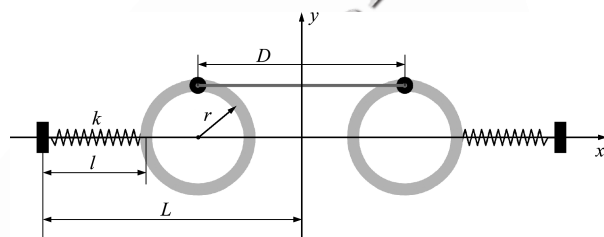


图3 弹簧连杆装置
Fig. 3 Spring-linkage mechanism

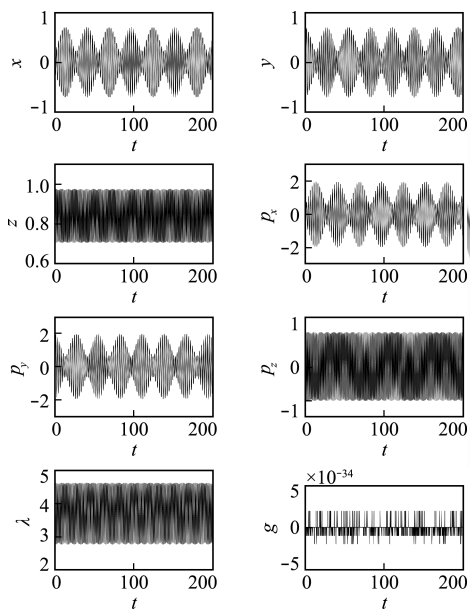


图1 三维球面摆数值积分结果
Fig. 1 Numerical results for the 3D pendulum

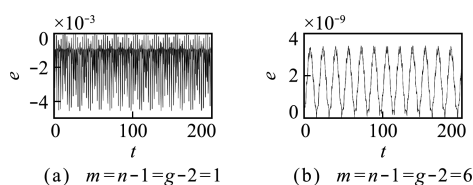


图2 三维球面摆哈密顿函数相对误差

Fig. 2 Relative error of Hamiltonian for the 3D pendulum with

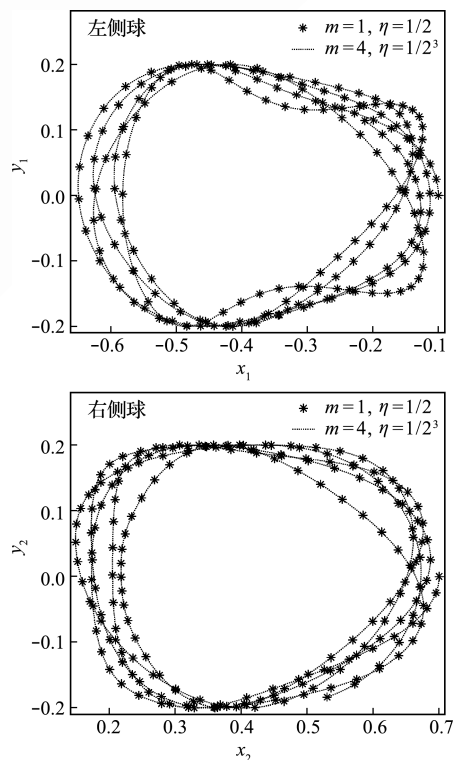


图4 弹簧连杆装置中两球运动轨迹

Fig. 4 Trajectory of the two balls of the spring-linkage mechanism

时的结果,曲线表示 $m=4$ 且 $\eta=1/2^3$ 时的结果。图 4 显示,两种算法所得的轨迹完全重合,证明解的稳定性。图 5 为算法参数满足最佳搭配方案,且 $m=1, \eta=1/2$ 时,弹簧连杆装置的三个完整约束方程之和在位移插值节点处的值。可以看出,即使采用很低的插值阶次和较大的积分步长,算法依然高精度地满足完整约束。

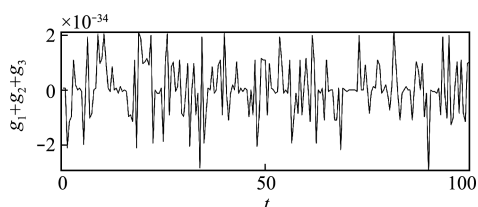


图 5 弹簧连杆装置完整约束之和

Fig. 5 Sum of the holonomic constraints for the spring-linkage mechanism

5 结 论

本文选取积分区间两端位移为独立变量,将位移、动量及拉格朗日乘子分别采用拉格朗日多项式近似,对作用量中包含约束的积分项使用 Lobatto 积分近似,对作用量中不包含约束的积分项使用 Gauss 积分近似,从而得到近似作用量。然后,在此近似作用量的基础上,基于对偶变量变分原理,构造了求解约束哈密顿系统的高阶保辛算法。通过数值算例得到如下结论。

(1) 如果位移、动量和拉格朗日乘子的插值阶次分别为 n, m 和 z , Gauss 积分点个数为 g , 则本文算法所需最少 Gauss 积分点个数为 $g > \max.(n, m)$ 。

(2) 位移插值阶次、动量插值阶次以及 Gauss 积分点个数的最佳搭配方案为 $m=n-1=g-2$ 。此时,算法的收敛阶数为 $s=2m+2$ 。

(3) 算法在位移插值点处高精度地满足完整约束方程。

参考文献(References):

- [1] Goldstein H. *Classical mechanics*[M]. Boston: Addison-Wesley, 1980.
- [2] Arnold V I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*[M]. Springer, 1989.
- [3] 冯 康,秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法[M]. 杭州:浙江科学技术出版社, 2003. (FENG Kang, QIN Meng-zhao. *Symplectic Geometric Algorithm for Hamiltonian Systems*[M]. Hangzhou: Zhejiang Science & Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [4] Johnson E R, Murphey T D. Scalable variational integrators for constrained mechanical systems in generalized coordinates[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, **25**(6): 1249-1261.
- [5] Kane C, Marsden J E, Ortiz M. Symplectic-energy-momentum preserving variational integrators [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, **40**(7): 3353-3371.
- [6] Reich S. Momentum conserving symplectic integrators[J]. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 1994, **76**(4): 375-383.
- [7] Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators[J]. *Acta Numerica*, 2001, **10**: 357-514.
- [8] Wenger T, Ober-Blöbaum S, Leyendecker S. Variational integrators of higher order for constrained dynamical systems[J]. *PAMM*, 2016, **16**(1): 775-776.
- [9] Wendlandt J M, Marsden J E. Mechanical integrators derived from a discrete variational principle[J]. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 1997, **106**(3-4): 223-246.
- [10] Ober-Blöbaum S, Saake N. Construction and analysis of higher order Galerkin variational integrators[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2015, **41**(6): 955-986.
- [11] Wenger T, Ober-Blöbaum S, Leyendecker S. Construction and analysis of higher order variational integrators for dynamical systems with holonomic constraints[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2017, **43**(5): 1163-1195.
- [12] Gao Q, Tan S J, Zhang H W, et al. Symplectic algorithms based on the principle of least action and generating functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, **89**(4): 438-508.
- [13] 高 强,彭海军,张洪武,等. 基于哈密顿动力系统新变分原理的保辛算法之一:变分原理和算法构造[J]. 计算力学学报, 2013, **30**(4): 461-467. (GAO Qiang, PENG Hai-jun, ZHANG Hong-wu, et al. The symplectic algorithms for Hamiltonian dynamic systems based on a new variational principle part I: The variational principle and algorithms[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(4): 461-467. (in Chinese))
- [14] 高 强,彭海军,张洪武,等. 基于哈密顿动力系统新变分原理的保辛算法之二:算法保辛性质证明[J]. 计算力学学报, 2013, **30**(4): 468-472. (GAO Qiang, PENG Hai-jun, ZHANG Hong-wu, et al. The symplectic algorithms for Hamiltonian dynamic systems based on a new variational principle part II: The proof of the symplecticity[J]. *Chinese Journal of Compu-*

- tational Mechanics, 2013, **30**(4): 468-472. (in Chinese))
- [15] 高 强, 彭海军, 张洪武, 等. 基于哈密顿动力系统新变分原理的保辛算法之三: 数值算例[J]. 计算力学学报, 2013, **30**(4): 473-478. (GAO Qiang, PENG Hai-jun, ZHANG Hong-wu, et al. The symplectic algorithms for Hamiltonian dynamic systems based on a new variational principle part III: The numerical examples[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2013, **30**(4): 473-478. (in Chinese))
- [16] Michels H H. Abscissas and weight coefficients for lobatto quadrature[J]. Mathematics of Computation, 1963, **17**(83): 237-244.
- [17] Hairer E, Jay L O. Implicit Runge-Kutta methods for higher-index differential-algebraic systems [J]. SIAM, 1993, **2**: 213-224.

Symplectic algorithm for holonomic constrained systems based on the dual variable variational principle

MAN Shu-min, GAO Qiang*, ZHONG Wan-xie

(Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: Based on the dual-variable variational principle, symplectic algorithms for Hamiltonian systems with holonomic constraints are derived by taking the displacements at two ends of time intervals as the independent variables. The approximation of the action integral is obtained by approximating the displacements, momentums and Lagrange multipliers by Lagrange polynomial, by implementing Gauss quadrature rule on the integral corresponding to the Hamiltonian, and by implementing Lobatto quadrature rule on the integral corresponding to constraints. Based on this approximation and using the dual-variable variational principle, the problem of solving holonomic constrained Hamiltonian systems is transformed into solving a set of nonlinear equations. The resulting algorithm is symplectic, has high convergence order and can satisfy the holonomic constraints with high-precision at interpolation points of the approximate displacements. The convergence order and numerical properties of the symplectic algorithms are shown by numerical examples.

Key words: symplectic; holonomic constraints; Hamiltonian system; dual variable

引用本文/Cite this paper:

满淑敏, 高 强, 钟万勰. 基于对偶变量变分原理的完整约束系统保辛算法[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(6): 655-660.

MAN Shu-min, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Symplectic algorithm for holonomic constrained systems based on the dual variable variational principle[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2020, **37**(6): 655-660.