

Klein-Gordon 波动方程多波传播的非线性特性

潘陈蓉, 陈松林*

(安徽工业大学 数理科学与工程学院, 马鞍山 243002)

摘要:基于双波初值问题,讨论非线性对多波传播的影响。通过选取合适的多重尺度,对 Klein-Gordon 波动方程进行变形,得到方程的解的多尺度展式,并得到三波传播时速度相互影响的定量关系,揭示了多波传播的非线性特性;最后,应用 Mathematica 对波动方程进行数值仿真。研究结果表明,另外多个波的存在会使波的传播速度(相速)超过独自传播时的速度(相速)。

关键词:非线性波动方程;多波传播;多尺度展式;首项近似;非线性特性;相速

中图分类号:O242.2

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2020)05-0646-05

1 引言

近几十年来,学者们在社会科学和自然科学领域建立了许多非线性数学模型,并提出了许多求解非线性波动方程的方法。如齐次平衡法^[1-3]、Jacobi 椭圆函数展开法^[4,5]和直接代数法^[6,7]等。Klein-Gordon 方程是著名的非线性波动方程,在力学、非线性光学、旋转波和一些数学物理问题中^[8-12],有着非常重要的研究和应用价值。

目前,已有众多学者研究了单个平面波和波-波在波的传播过程中的相互作用,Holmes^[13]研究了非线性波动方程中的波-波相互作用,Zhang 等^[14]研究了广义 β 效应下的非线性行星-天气波相互作用及其解的性态,李群等^[15]研究了内孤立波的波-波相互作用,那仁满都拉^[16]研究了流体与固体介质中的有限振幅波与孤立波的传播和相互作用。对三个波以上的多波相互作用的研究较少。

本文讨论非线性对多波传播的影响。选取适当的初值和引入多重尺度,对 Klein-Gordon 方程进行变形。应用多重尺度方法讨论三波初值在传播过程中的相互作用,根据三波初值相互作用的研究,得到多波初值在传播过程中速度相互影响的定量关系。最后,应用 Mathematica 数值求解非线性 Klein-Gordon 波动方程,并作解的波动图和解的首项近似的波动图。由数值仿真结果可知,本文使

用多重尺度方法获得的结果具有较好的精度。

2 研究背景

Holmes^[13]研究了非线性波动方程中的波-波相互作用,得到双波传播过程中速度相互影响的定量关系式,所得结果表明,一个波的存在会使得另一个波的传播速度超过独自传播时的速度。Zhang 等^[14]研究广义 β 效应下的非线性行星-天气波相互作用,通过使用多重尺度和摄动展开的方法,得到了天气尺度波的修正方程。结果表明,行星尺度波和天气尺度波的不对称性、强度和持续性依赖于广义 β 效应。李群等^[15]对内孤立波的波-波相互作用进行数值模拟,数值结果体现了波-波相互作用的非线性特征,即在两波相交处,相速会随着振幅的增大而增大。

考虑非线性波动方程

$$\partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \epsilon u^3 \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \quad (1)$$

初值条件为

$$u(x, 0) = F(x), \quad \partial_t u(x, 0) = G(x) \quad (2)$$

这是著名的非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题,描述的是在弹性基座上弦的振动或者冷电子等离子体中的波。本文研究上述问题的行波解。首先,考虑当 $\epsilon = 0$ 时得到的线性方程,使用傅里叶变换,得到通解形式为

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) e^{i(kx + \omega t)} dk \quad (3)$$

式中 $\omega = \sqrt{1 + k^2}$, $A(k)$ 和 $B(k)$ 由初始条件决定,故线性方程具有波动解。式(3)表明线性方程的解可以写成平面波解 $u_{\pm}(x, t) = e^{i(kx \pm \omega t)}$ 的叠

收稿日期:2020-01-19;修改稿收到日期:2020-05-09.

基金项目:安徽省高校自然科学研究重点(KJ2019A0062)

资助项目.

作者简介:陈松林*(1964-),男,硕士,教授

(E-mail:slchen@ahut.edu.cn).

加。基于上述研究,考虑非线性对平面波的作用和影响。

设式(1,2)解的形式渐近展开为

$$u(x, t) \sim u_0(kx - \omega t) + \epsilon u_1(x, t) + \dots \quad (4)$$

可以看出,若直接寻找式(4)的渐近解,会导致长期项。因此,本文使用多重尺度研究非线性对右行波的影响。对于单个波传播情形,可选取多重尺度

$$\theta = kx - \omega t, \quad x_2 = \epsilon x, \quad t_2 = \epsilon t \quad (5)$$

式中 $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ ($k > 0$)。于是有

$$\partial_x \rightarrow k \partial_\theta + \epsilon \partial_{x_2}, \quad \partial_t \rightarrow -\omega \partial_\theta + \epsilon \partial_{t_2} \quad (6)$$

则微分方程(1)化为

$$[\partial_\theta^2 - 2\epsilon(k \partial_{x_2} + \omega \partial_{t_2}) \partial_\theta] u + u + \epsilon u^3 + O(\epsilon^2) = 0 \quad (7)$$

继而可得不含长期项的解的多尺度展式

$$u(x, t) \sim u_0(\theta, x_2, t_2) + \epsilon u_1(\theta, x_2, t_2) + \dots \quad (8)$$

对于初始条件中具有多波的情形,多重尺度式(5)和多尺度展式(8)一般无效。此时选择更一般的多重尺度

$$x_1 = x, \quad x_2 = \epsilon x, \quad t_1 = t, \quad t_2 = \epsilon t \quad (9)$$

李群等^[15]对内孤立波的波-波相互作用进行数值模拟,数值结果表明,在两波相交处,相速会随着振幅的增大而增大。Holmes^[13]研究非线性波动方程的双波相互作用,通过选取适当的初值和引入多重尺度,获得弱非线性 Klein-Gordon 方程的解的首项近似,得到双波传播时,一个波的存在会使另一个波的传播速度超过独自传播时的速度。本文通过对三波情形的研究,讨论多波传播时行波相互影响的定性与定量关系。

3 多波相互作用

3.1 三波相互作用

由于在实际问题中常出现初始条件呈现多个波的情形。为了讨论非线性对波传播的影响,本文考虑三个波的情形,为此,假设初值

$$u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x) + \alpha_3 \cos(k_3 x) \quad (10)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x) + \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x) \quad (11)$$

式中 $\omega_1 = \sqrt{1 + k_1^2}$, $\omega_2 = \sqrt{1 + k_2^2}$, $\omega_3 = \sqrt{1 + k_3^2}$ 。

因为假设的三个波是不同的,所以设 k_1, k_2 和 k_3 彼此不等。此时相应的线性方程具有式(12)形式的解

$$u = \alpha_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t) + \alpha_3 \cos(k_3 x - \omega_3 t) \quad (12)$$

在多波传播时,引入式(9)的多重尺度,则有

$$\partial_x \rightarrow \partial_{x_1} + \epsilon \partial_{x_2}, \quad \partial_t \rightarrow \partial_{t_1} + \epsilon \partial_{t_2} \quad (13)$$

方程(1)化为

$$(\partial_{x_1}^2 + \epsilon^2 \partial_{x_2}^2 + 2\epsilon \partial_{x_1} \partial_{x_2}) u = (\partial_{t_1}^2 + \epsilon^2 \partial_{t_2}^2 + 2\epsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2}) u + u + \epsilon u^3 \quad (14)$$

引入其解的多尺度展式

$$u \sim u_0(x_1, t_1, x_2, t_2) + \epsilon u_1(x_1, t_1, x_2, t_2) + \dots \quad (15)$$

代入方程(14)及初始条件(10,11),平衡其两边的 $O(1)$ 项,可得

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 u_0 &= \partial_{t_1}^2 u_0 + u_0 \\ u_0(x_1, 0, x_2, 0) &= \alpha_1 \cos(k_1 x_1) + \alpha_2 \cos(k_2 x_1) + \alpha_3 \cos(k_3 x_1) \\ \partial_{t_1} u_0(x_1, 0, x_2, 0) &= \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x_1) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x_1) + \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x_1) \end{aligned}$$

于是可得

$$u_0 = A_1(x_2, t_2) \cos(\phi_1) + A_2(x_2, t_2) \cos(\phi_2) + A_3(x_2, t_2) \cos(\phi_3) \quad (16)$$

式中 $\phi_1 = k_1 x_1 - \omega_1 t_1 + \theta_1(x_2, t_2)$

$$\phi_2 = k_2 x_1 - \omega_2 t_1 + \theta_2(x_2, t_2)$$

$$\phi_3 = k_3 x_1 - \omega_3 t_1 + \theta_3(x_2, t_2)$$

$A_1, A_2, A_3, \theta_1, \theta_2$ 和 θ_3 是关于 x_2 和 t_2 的任意函数,要求满足初始条件,即

$$\begin{aligned} A_1(x_2, 0) &= \alpha_1, \quad A_2(x_2, 0) = \alpha_2, \quad A_3(x_2, 0) = \alpha_3 \\ \theta_1(x_2, 0) &= \theta_2(x_2, 0) = \theta_3(x_2, 0) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

再平衡其两边的 $o(\epsilon)$ 项,得

$$\partial_{x_1}^2 u_1 = \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 - 2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 + 2 \partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0 - u_0^3 \quad (18)$$

从式(16)得

$$\begin{aligned} u_0^3 &= \frac{3}{4} (A_1^3 + 2A_1 A_2^2 + 2A_1 A_3^2) \cos(\phi_1) + \\ &\quad \frac{3}{4} (A_2^3 + 2A_2 A_1^2 + 2A_2 A_3^2) \cos(\phi_2) + \\ &\quad \frac{3}{4} (A_3^3 + 2A_3 A_1^2 + 2A_3 A_2^2) \cos(\phi_3) + \\ &\quad \frac{1}{4} A_1^3 \cos(3\phi_1) + \frac{1}{4} A_2^3 \cos(3\phi_2) + \frac{1}{4} A_3^3 \cos(3\phi_3) + \\ &\quad \frac{3}{2} A_1 A_2 A_3 [\cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) + \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3) + \\ &\quad \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \cos(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3)] + \\ &\quad \frac{3}{4} A_1 A_2 [A_2 \cos(\phi_1 - 2\phi_2) + A_2 \cos(\phi_1 + 2\phi_2) + \\ &\quad A_1 \cos(2\phi_1 - \phi_2) + A_1 \cos(2\phi_1 + \phi_2)] + \\ &\quad \frac{3}{4} A_1 A_3 [A_3 \cos(\phi_1 - 2\phi_3) + A_3 \cos(\phi_1 + 2\phi_3) + \\ &\quad A_1 \cos(2\phi_1 - \phi_3) + A_1 \cos(2\phi_1 + \phi_3)] + \\ &\quad \frac{3}{4} A_2 A_3 [A_3 \cos(\phi_2 - 2\phi_3) + A_3 \cos(\phi_2 + 2\phi_3) + \\ &\quad A_2 \cos(2\phi_2 - \phi_3) + A_2 \cos(2\phi_2 + \phi_3)] \end{aligned}$$

式中 等式右边的前三项在多尺度展式中将产生一个长期项,且满足 $\omega_i = \sqrt{1 + k_i^2}$ 。结合 $-2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 +$

$2\partial_{t_1}\partial_{t_2}u_0$, 将前三项从方程中消去, 可得

$$(k_i\partial_{x_2} + \omega_i\partial_{t_2})A_i = 0 \quad (19)$$

$$\text{和 } (k_i\partial_{x_2} + \omega_i\partial_{t_2})\theta_i = -\frac{3}{8}(A_i^2 + 2A_j^2 + 2A_k^2) \quad (20)$$

式中 $i \neq j \neq k$ 。线性波动方程(19)的通解为

$$A_i = A_i(\omega_i x_2 - k_i t_2) \quad (21)$$

结合初始条件(17), A_i 为常数, 且 $A_i = \alpha_i$, 则线性波动方程(20)的通解为

$$(k_i\omega_j - k_j\omega_i)\theta_i = -\frac{3}{8}(A_i^2 + 2A_j^2 + 2A_k^2) \times \\ (\omega_j x_2 - k_j t_2) + c_i(\omega_i x_2 - k_i t_2) \quad (22)$$

式中 c_i 由式(17)决定, 从而可得

$$\theta_i = -\frac{3}{8\omega_i}(A_i^2 + 2A_j^2 + 2A_k^2)t_2 \quad (23)$$

结合初始条件(10,11), 得到弱非线性 Klein-Gordon 方程的解的首项近似为

$$u \sim \alpha_1 \cos(k_1 x - \lambda_1 \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \lambda_2 \omega_2 t) + \\ \alpha_3 \cos(k_3 x - \lambda_3 \omega_3 t) \quad (24)$$

$$\text{式中 } \lambda_1 = 1 + \frac{3\epsilon}{8\omega_1^2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2)$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{3\epsilon}{8\omega_2^2}(\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2)$$

$$\lambda_3 = 1 + \frac{3\epsilon}{8\omega_3^2}(\alpha_3^2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2)$$

3.2 多波相互作用

仿照三波传播的讨论, 一般地, 对于具有 n 个初始波的情形

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \epsilon u^3 \\ u(x, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(k_i x) \\ \partial_t u(x, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i \sin(k_i x) \end{cases} \quad (25)$$

引入式(9)的多重尺度, 可得到方程解的首项近似为

$$u \sim \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(k_i x - \lambda_i \omega_i t) \quad (26)$$

$$\text{式中 } \lambda_i = 1 + \frac{3\epsilon}{8\omega_i^2}(\alpha_i^2 + 2\sum_{j \neq i}^n \alpha_j^2) (i=1, 2, \dots, n)。$$

4 数值仿真

为了验证本文多重尺度方法的有效性, 在非线性 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \epsilon u^3 \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x) + \\ \alpha_3 \cos(k_3 x) \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x) + \\ \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x) \end{cases} \quad (27)$$

中, 取 $\epsilon = 0.005, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$

$$k_1 = 0.5, k_2 = 1, k_3 = 2 \quad (28)$$

由 $\omega_i = \sqrt{1+k_i^2}$ 得 $\omega_1 = \sqrt{1.25}, \omega_2 = \sqrt{2}, \omega_3 = \sqrt{5}$ 。应用 Mathematica 对非线性 Klein-Gordon 方程(27)进行数值求解, 并作方程在区域 $0 < t < 3$ 和 $-10 < x < 10$ 的波动, 如图 1 所示。接着作出本文得到的非线性 Klein-Gordon 方程解的首项近似式(24)在区域 $0 < t < 3$ 和 $-10 < x < 10$ 的波动, 如图 2 所示。可以看出, 在区域 $0 < t < 3$ 和 $-10 < x < 10$ 中, 非线性 Klein-Gordon 方程的解和方程解的首项近似式(24)几乎一致。从图 1 可以看出, 方程在边界 $x = \pm 10$ 处出现了奇性, 这是由于 Mathematica 在数值求解时受到自动设置人工边界的影响。综上可知, 本文使用多重尺度方法讨论非线性 Klein-Gordon 方程的多波传播具有较好的有效性。

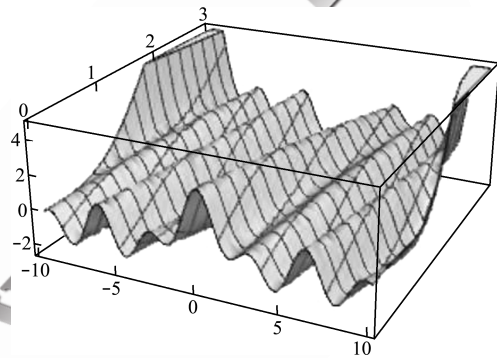


图 1 非线性 Klein-Gordon 方程在区域 $0 < t < 3$ 和 $-10 < x < 10$ 的波动

Fig. 1 Wave diagram of nonlinear Klein-Gordon equation in region $0 < t < 3, -10 < x < 10$

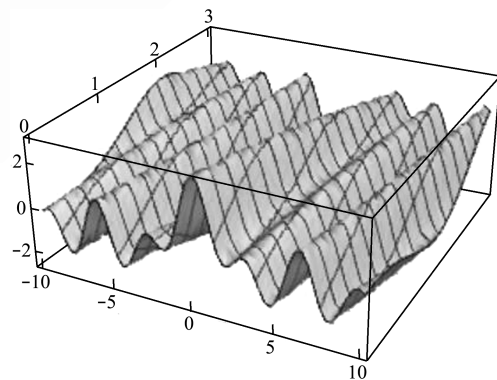


图 2 非线性 Klein-Gordon 方程解的首项近似式(21)在区域 $0 < t < 3$ 和 $-10 < x < 10$ 的波动

Fig. 2 Fluctuation chart of the first term approximation (21) of the solution of nonlinear Klein-Gordon equation in the region $0 < t < 3, -10 < x < 10$

5 结 论

本文讨论非线性对多波传播的影响。选取合适的初值和引入多重尺度, 对 Klein-Gordon 波动

方程进行变形。对三波传播进行讨论,引入解的多尺度展式,设定合适的初始条件,得到方程解的首项近似和三波初值在传播过程中的速度相互影响的定量关系。研究表明,三波传播时,其中一个波传播的速度受到另外两个波的影响,即另外两个波的存在会使得波的传播速度(相速)超过独自传播时的速度(相速)。研究结果对多波情形仍然成立,根据三波初值相互作用的研究,得到各波传播过程中的速度相互影响的定量关系。研究表明,多波初值在传播过程中,一个波的传播速度会受到另外多个波的影响,即另外多个波的存在会使得波的传播速度(相速)超过独自传播时的速度(相速)。推广了 Holmes^[13]关于双波传播的研究结果。

本文应用 Mathematica 对波动方程进行数值仿真,根据波动图可以看出,非线性 Klein-Gordon 方程的解和方程解的首项近似式(24)是几乎一致的。结果表明,本文使用的多重尺度法具有较好的适用性。

参考文献(References):

- [1] Wei Y, He X D, Yang X F. The homogeneous balance of undetermined coefficients method and its application[J]. *Open Mathematics*, 2016, **14**(1): 816-826.
- [2] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. *Physics Letters A*, 1996, **216**(1-5): 67-75.
- [3] 陈松林, 侯为根. 推广的 B-BBM 方程和 B-BBM 方程的显式精确解[J]. *物理学报*, 2001, **50**(10): 1842-1845. (CHEN Song-lin, HOU Wei-gen. Explicit exact solutions of generalized B-BBM and B-BBM equations [J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(10): 1842-1845. (in Chinese))
- [4] Mehmet E. Optical solitons in birefringent fibers for Lakshmanan-Porsezian-Daniel model by extended Jacobi's elliptic function expansion scheme [J]. *Optik*, 2018, **172**: 651-656.
- [5] Tala-Tebue E, Djoufack Z I, Fendzi-Donfack E, et al. Exact solutions of the unstable nonlinear Schrödinger equation with the new Jacobi elliptic function rational expansion method and the exponential rational function method [J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2016, **127**(23): 11124-11130.
- [6] 于亚璇, 王 琪, 赵雪芹, 等. 求解非线性差分方程孤立波解的直接代数法[J]. *物理学报*, 2005, **54**(9): 3992-3994. (YU Ya-xuan, WANG Qi, ZHAO Xue-qin, et al. A direct algebraic method to obtain solitary solutions of nonlinear differential-difference equations [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(9): 3992-3994. (in Chinese))
- [7] 陈松林, 马文冉. 带有 Neumann 边界波动方程初边值问题的达朗贝尔类解[J]. *振动与冲击*, 2018, **37**(21): 253-259, 266. (CHEN Song-lin, MA Wen-ran. D'Alembert solution to initial-boundary value problems of wave equation with Neumann boundary [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, **37**(21): 253-259, 266. (in Chinese))
- [8] Su H, Zhang W H. Adaptive fuzzy control of stochastic nonlinear systems with fuzzy dead zones and unmodeled dynamics[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(2): 587-599.
- [9] 李志彬, 江 鹏, 潘嘉诚, 等. 基于预估-校正的 Generalized- α 法及其在非线性和结构动力学中的应用[J]. *计算力学学报*, 2020, **37**(1): 28-33. (LI Zhi-bin, JIANG Peng, PAN Jia-cheng, et al. The predictor-corrector scheme based Generalized- α method and its application in nonlinear structural dynamics [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(1): 28-33. (in Chinese))
- [10] 肖国峰. 具有稳定数值解的三维谐振子[J]. *计算力学学报*, 2020, **37**(1): 119-130. (XIAO Guo-feng. 3D harmonic oscillator with stable numerical solution [J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(1): 119-130. (in Chinese))
- [11] 孙 波. 移动荷载作用下饱和土地基中的波动特性分析[J]. *计算力学学报*, 2018, **35**(6): 802-808. (SUN Bo. The analysis of wave characteristics in half space of saturated soils under the moving load [J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2018, **35**(6): 802-808. (in Chinese))
- [12] 杨 喆, 陈国海, 杨迪雄. 基于黎曼几何的非线性振子动力学分析递推解析算法[J]. *计算力学学报*, 2019, **36**(3): 310-316. (YANG Zhe, CHEN Guo-hai, YANG Di-xiong. A recursive analytical algorithm for dynamics analysis of nonlinear oscillator based on riemann geometry [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(3): 310-316. (in Chinese))
- [13] Holmes M H. *Introduction to Perturbation Methods* [M]. Springer, 1996.
- [14] Zhang R G, Liu Q S, Yang L G, et al. Nonlinear planetary-synoptic wave interaction under generalized beta effect and its solutions [J]. *Chaos, Solitons &*

Fractals, 2019, **122**: 270-280.

- [15] 李 群, 孙 丽, 徐肇廷. 内孤立波波-波相互作用的数值模拟[J]. 中国海洋大学学报, 2007, **37**(6): 868-872. (LI Qun, SUN Li, XU Zhao-ting. Modeling the wave-wave interaction between internal solitary waves[J]. *Periodical of Ocean University of China*, 2007, **37**(6): 868-872. (in Chinese))

- [16] 那仁满都拉. 流体与固体介质中有限振幅波、孤立波的传播和相互作用的理论与求解方法研究[D]. 吉林大学, 2005. (Naranmandula. Study on Theory and Solving Method for Propagation and Interaction of Finite-amplitude Waves and Solitary Waves in Fluid and Solid Media [D]. Jilin University, 2005. (in Chinese))

Nonlinear characteristics of multi-wave propagation in Klein-Gordon wave equation

PAN Chen-rong, CHEN Song-lin*

(School of Mathematical Sciences and Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan 243002, China)

Abstract: The influence of nonlinearity on multi-wave propagation was discussed based on the study of the two-wave initial value problem. By choosing appropriate multiple scales and deforming Klein-Gordon wave equation, the multi-scale extended first term approximation of the solution of the equation and the quantitative relationship between the influence of three-wave propagation velocity were obtained, which revealed the nonlinear characteristics of multi-wave propagation. Finally, the wave equation was solved numerically in Mathematica. The research results showed that the existence of additional multiple waves would make the propagation speed (phase velocity) of wave exceed the speed (phase velocity) that it propagated alone.

Key words: nonlinear wave equation; multi-wave propagation; multi-scale expansion; leading-term approximation; nonlinear characteristic; phase velocity

引用本文/Cite this paper:

潘陈蓉, 陈松林. Klein-Gordon 波动方程多波传播的非线性特性[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(5): 646-650.

PAN Chen-rong, CHEN Song-lin. Nonlinear characteristics of multi-wave propagation in Klein-Gordon wave equation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5): 646-650.