

DOI: 10.7511/jslx20190915001

# 基于物理中面 FGM 板屈曲的有限元分析

孙云\*, 陈江, 李世荣

(扬州大学 建筑科学与工程学院, 扬州 225127)

**摘要:** 基于物理中面的概念, 根据最小势能原理推导了功能梯度材料 FGM 薄板屈曲的有限元控制方程, 求得临界荷载的有限元解。利用 FGM 板的屈曲方程与参考均匀板的屈曲方程之间的相似性, 建立了 FGM 板的临界荷载与参考均匀板的临界荷载之间的相似转换关系式, 从而将 FGM 板临界荷载的计算转变为参考均匀板的临界荷载和材料不均匀系数的计算, 极大地提高了计算效率, 为 FGM 的推广起积极的推动作用。通过数值算例, 将由有限元法和转换关系式得到的临界荷载进行了比较, 并讨论了边界条件、荷载工况、材料组成和几何尺寸等对 FGM 板临界荷载的影响。

**关键词:** 物理中面; FGM 薄板; 屈曲; 有限元法; 转换关系式

**中图分类号:** O343; O242.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2020)05-0560-07

## 1 引言

功能梯度材料 FGM 作为一种新型的复合材料, 其材料性能在空间连续变化, 有效地缓解了应力集中。FGM 在航空航天、建筑、机械和电子等工程领域有着广泛的应用前景。

已有很多文献分别基于经典板理论、一阶剪切变形板理论和高阶剪切变形板理论等对 FGM 板的屈曲问题进行了研究。基于经典板理论, Javaheri 等<sup>[1]</sup>用能量法研究了四边简支 FGM 板在双向面内压力下的屈曲行为。Shariat 等<sup>[2]</sup>得到了有初始几何缺陷的四边简支 FGM 板在双向面内压力作用下临界荷载的闭合解。Yu 等<sup>[3]</sup>用 Levy 法求得了弹性地基上两对边简支另两对边为任意边界的 FGM 板在单向和双向受压时发生屈曲的解析解。Mohammadi 等<sup>[4]</sup>基于最小势能原理建立了 FGM 薄板屈曲的控制方程, 用 Levy 法得到了两对边简支 FGM 板的临界荷载。Asemi 等<sup>[5]</sup>用三维有限元分析方法研究了 FGM 板在各种面内荷载作用下的屈曲, 其解既能保证位移的连续性也能保证应力和应变的连续性。

基于一阶剪切变形板理论, Yang 等<sup>[6]</sup>用一阶摄动法分析了矩形板的弹性屈曲问题。Zhao 等<sup>[7]</sup>采用无网格 kp-Ritz 法对 FGM 板在热机荷载下的

屈曲进行了分析。Naderi 等<sup>[8]</sup>用最小势能原理对 FGM 板的屈曲构形进行了分析。Mohammadi 等<sup>[9]</sup>基于 Mindlin 板理论, 用 Levy 法分析了两对边简支其他边界任意的矩形板的屈曲问题, 得到了不同荷载条件下板的临界屈曲荷载。Nguyen-Xuan 等<sup>[10]</sup>基于边的光滑有限元方法对 FGM Mindlin 板进行了静力分析、自由振动分析和屈曲分析。

基于三阶剪切变形板理论, Reddy<sup>[11]</sup>对 FGM 板进行了分析研究, 得到了四边简支板的静力响应、屈曲和自由振动的 Navier 解。Bodaghi 等<sup>[12]</sup>基于高阶剪切变形板理论, 用 Levy 法分析了两对边简支另两对边为任意边界的 FGM 板在各种荷载条件下的屈曲问题, 得到了临界荷载的解析解。Thai 等<sup>[13]</sup>采用精化板理论对 FGM 板的屈曲进行了分析, 得到了四边简支 FGM 矩形板在双向面内受压时临界荷载的闭合解。Zenkour 等<sup>[14]</sup>基于精化的高阶剪切和法向变形板理论, 用 Navier 法研究了简支 FGM 矩形板在单向压力和双向压力作用下的屈曲行为。Singh 等<sup>[15]</sup>基于非多项式高阶剪切变形理论, 用 Navier 法研究了简支 FGM 板在均匀、线性和非线性荷载作用下的屈曲响应。在上述研究方法中, 解析法如 Navier 法和 Levy 法仅能考虑有限的几种边界条件, 而有限元法可以研究边界条件、荷载工况、材料组成和几何尺寸为任意情况时的问题。

上述文献中, FGM 板的控制方程是基于几何中面建立的。张大光<sup>[16]</sup>提出了物理中面的概念,

收稿日期: 2019-09-15; 修改稿收到日期: 2020-04-30.

基金项目: 国家自然科学基金(11672260); 中国博士后基金(149558)资助项目.

作者简介: 孙云\*(1973-), 女, 博士, 副教授  
(E-mail: syun@yzu.edu.cn)

基于物理中面建立 FGM 板的控制方程可消除拉弯耦合的影响,简化方程的求解,在保证计算精度的同时提高了计算效率。但目前基于物理中面研究的文章较少,Zhang 等<sup>[17]</sup>基于物理中面和经典板理论分析了 FGM 矩形薄板的弯曲、振动、屈曲和非线性弯曲;Latifi 等<sup>[18]</sup>基于物理中面和经典板理论,采用 Fourier 级数展开法研究了任意边界条件下 FGM 矩形薄板在双向受压时的屈曲问题。

本文将基于物理中面和经典板理论研究 FGM 板的屈曲问题。首先,根据最小势能原理建立 FGM 板有限元形式的屈曲控制方程;然后,利用 FGM 板的屈曲方程与参考均匀板屈曲方程之间的相似性,建立 FGM 板的临界荷载与参考均匀板的临界荷载之间的相似转换关系式;最后,通过数值算例,将临界荷载的有限元解与转换关系式求得的临界荷载进行比较,并讨论边界条件、荷载工况、材料梯度指数和长宽比等对 FGM 板临界荷载的影响。利用转换关系,只要知道参考均匀板的临界荷载即可求解出 FGM 板的临界荷载,这种方法极大地减少了计算工作量,为 FGM 材料的推广起积极的推动作用。

## 2 基于物理中面 FGM 薄板的基本方程

考虑 FGM 矩形板,长度为  $l_1$ ,宽度为  $l_2$ ,厚度为  $h$ ,将  $xOy$  面置于板的几何中面上, $x$  轴和  $y$  轴分别沿板的长度和宽度方向, $z$  轴沿厚度方向向上。设 FGM 板的弹性模量  $E$  只沿厚度方向按幂函数规律变化,

$$E(z) = (E_t - E_b) \left[ \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right]^n + E_b \quad (1)$$

式中  $E_t$  和  $E_b$  分别为板上下表面组分材料的弹性模量, $n$  为材料梯度指数,  $n \in [0, \infty)$ ,当  $n = 0$  和  $n \rightarrow \infty$  时,FGM 板分别退化为由上下表面材料组成的均匀板。

取 FGM 板的物理中面为  $z = z_0$  所在平面<sup>[16]</sup>,其中

$$z_0 = \int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz / \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz \quad (2)$$

基于物理中面的概念,经典板理论下 FGM 板内的位移场为

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}(z - z_0), v = -\frac{\partial w}{\partial y}(z - z_0), w = w(x, y) \quad (3)$$

式中  $u, v$  和  $w$  分别为板内任意一点在  $x, y$  和  $z$  方向的位移。

根据几何方程<sup>[17]</sup>,可得板内的应变为

$$\{\epsilon\} = (z - z_0) \{\kappa\} \quad (4)$$

式中  $\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T$

$$\{\kappa\} = \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T$$

根据胡克定律<sup>[17]</sup>,板内的应力与应变关系为

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (5)$$

式中  $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ ,  $[D]$  为弹性矩阵,即

$$[D] = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

由于 FGM 板的泊松比  $\nu$  变化不大,假设其为常数。

## 3 FGM 薄板屈曲的有限元分析

对 FGM 板进行有限元分析时,采用 4 结点矩形单元,单元平面尺寸为  $2a \times 2b$ ,每个结点有 3 个自由度,即挠度  $w$ 、绕  $x$  轴的转角  $\theta_x$  和绕  $y$  轴的转角  $\theta_y$ 。根据直法线假设,每个结点的位移可表示为

$$\{d_i\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ (\partial w / \partial y)_i \\ -(\partial w / \partial x)_i \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7)$$

则每个单元有 12 个自由度,单元的结点位移列阵可以表示为

$$\{d\}^{(e)} = [\{d_1\}^{(e)}, \{d_2\}^{(e)}, \{d_3\}^{(e)}, \{d_4\}^{(e)}]^T \quad (8)$$

将单元内任一点的挠度  $w$  表示为含 12 个待定系数的多项式

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (9)$$

将单元的 4 个结点坐标  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 代入式(9)的挠度  $w$  及其导数  $\partial w / \partial y$  和  $\partial w / \partial x$  的表达式,可得到 12 个以  $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$  为变量的线性方程组,解此方程组得  $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ ,再将其代入式(9)可得到单元内挠度的表达式为

$$w = [N] \{d\}^{(e)} \quad (10)$$

式中  $[N] = [[N_1][N_2][N_3][N_4]]$  为形函数矩阵,  $[N_i] = [N_i, N_{ix}, N_{iy}]$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \\ N_{ix} = -\frac{1}{8} b \eta_i (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 - \eta^2) \\ N_{iy} = \frac{1}{8} a \xi_i (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 - \xi^2) \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (11)$$

式中  $\xi$  和  $\eta$  为参考坐标系。

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \xi_i = \frac{x_i}{a}, \eta_i = \frac{y_i}{b} \quad (12)$$

将式(10)代入式(4),可得用单元结点位移表示的单元应变

$$\{\epsilon\}^{(e)} = [B] \{d\}^{(e)} \quad (13)$$

式中  $[B] = [[B_1][B_2][B_3][B_4]]$  为应变矩阵,其中子矩阵

$$[B_i] = - (z - z_0) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (14)$$

将式(13)代入式(5),可得用单元结点位移表示的单元应力

$$\{\sigma\}^{(e)} = [D][B]\{d\}^{(e)} \quad (15)$$

平面线弹性问题的最小势能原理为

$$\delta \Pi = \delta(U + V) = 0 \quad (16)$$

式中  $U$  为应变能,  $V$  为外力势能。

整个结构的应变能可表示为

$$U = \sum_{e=1}^{n_e} \iint_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\{\epsilon\}^{(e)})^T \{\sigma\}^{(e)} dV \quad (17)$$

式中  $n_e$  为单元总数。

将式(13)的单元应变和式(15)的单元应力代入式(17),得

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} (\{d\}^{(e)})^T [k]^{(e)} \{d\}^{(e)} \quad (18)$$

式中  $[k]^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} [B]^T [D^*] [B] dx dy$  为单元刚度矩阵,

$$[D^*] = D' \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, D' = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z-z_0)^2 E(z)}{1-\nu^2} dz \quad (19)$$

整个结构的外力势能可表示为

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \iint_{A^{(e)}} \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA \quad (20)$$

式中  $N_x, N_y$  和  $N_{xy}$  为薄膜力。设  $(N_x, N_y, N_{xy}) = \lambda(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)$ ,  $\lambda$  为荷载参数,  $N_x^0, N_y^0$  和  $N_{xy}^0$  为已知函数。将式(10)的位移代入式(20)可得

$$V = -\frac{\lambda}{2} \sum_{e=1}^{n_e} (\{d\}^{(e)})^T [k_0]^{(e)} \{d\}^{(e)} \quad (21)$$

式中  $[k_0]^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} [B_0]^T [N_0] [B_0] dA$  为单元的初应力刚度矩阵。

$$[B_0] = \left[ \frac{\partial [N]}{\partial x} \quad \frac{\partial [N]}{\partial y} \right]^T, [N_0] = \begin{bmatrix} N_x^0 & N_{xy}^0 \\ N_{xy}^0 & N_y^0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

将式(18,21)的单元结点位移列阵扩展为结构的整体结点位移列阵  $\{d\}$ , 并将单元的刚度矩阵进行相应的扩展和组装,再代入式(16),考虑  $\delta \{d\}^T$  的任意性,可得

$$([K] - \lambda [K_0]) \{d\} = 0 \quad (23)$$

式中  $[K]$  为整体刚度矩阵,  $[K_0]$  为整体的初应力刚度矩阵,  $\{d\}$  为整体结点位移列阵。

令式(23)的系数行列式等于0,得到 FGM 板的屈曲控制方程

$$|[K] - \lambda [K_0]| = 0 \quad (24)$$

该方程的最小特征值即为 FGM 板屈曲时的临界荷载。

#### 4 FGM 板与参考均匀板临界荷载之间的相似转换关系

将式(1)代入式(2),并进行积分计算得

$$z_0 = \phi_2 h / \phi_1 \quad (25)$$

式中  $\phi_1 = 1 + \beta / (n+1)$ ,  $\phi_2 = n\beta / [2(n+1)(n+2)]$ ,  $\beta = E_c / E_b - 1$ 。

将式(1)代入式(19),并利用式(25)得

$$D' = D_b / c \quad (26)$$

式中  $D_b = E_b h^3 / 12(1 - \nu^2)$  为下表面材料组成的均匀板的抗弯刚度;  $c = 1 / (\phi_3 - 12\phi_2^2 / \phi_1)$  为无量纲系数,反映了 FGM 材料的不均匀性,其中  $\phi_3 = 1 + 3\beta(n^2 + n + 2) / [(n+1)(n+2)(n+3)]$ 。

将式(26)代入式(18)的单元刚度矩阵  $[k]^{(e)}$

$$[k]^{(e)} = [k_b]^{(e)} / c \quad (27)$$

式中  $[k_b]^{(e)}$  为由下表面材料组成的均匀板的单元刚度矩阵。

式(27)组装后得结构的整体刚度矩阵为

$$[K] = [K_b] / c \quad (28)$$

将式(28)代入式(24)可得

$$|[K_b] / c - \lambda [K_0]| = 0 \quad (29)$$

特殊情况下,当  $n \rightarrow \infty$  时,FGM 板退化为由下表面材料组成的均匀板,此时有

$$|[K_b] - \lambda_b [K_0]| = 0 \quad (30)$$

对比式(29,30),可得 FGM 板的临界荷载  $\lambda$  与参考均匀板(由下表面材料组成)的临界荷载  $\lambda_b$  之间的相似转换关系为

$$\lambda = \lambda_b / c \quad (31)$$

因此,若已知参考均匀板的临界荷载  $\lambda_0$ ,就可由式(31)直接计算出 FGM 板的临界荷载  $\lambda$ ,极大地减少了计算工作量。

### 5 数值结果与讨论

FGM 板由  $Al_2O_3/Al$  组成,上表面材料为纯陶瓷( $Al_2O_3$ ),下表面材料为纯金属( $Al$ )。 $Al_2O_3$  和  $Al$  的弹性模量分别为  $E_t = 380$  GPa 和  $E_b = 70$  GPa。FGM 板的泊松比取为  $\nu = 0.3$ 。

考虑如图 1 所示的四种边界情况,(1) 四边简支(SSSS),(2) 两对边简支两对边固支(SSCC),(3) 四边固支(CCCC),(4) 两对边简支两对边自由(SSFF)。

在  $x=0$  和  $x=l_1$  边上,

$$\text{简支时, } w=0, \partial^2 w / \partial x^2 + \nu(\partial^2 w / \partial y^2) = 0$$

$$\text{固支时, } w=0, \partial w / \partial x = 0$$

在  $y=0$  和  $y=l_2$  边上,

$$\text{简支时, } w=0, \partial^2 w / \partial y^2 + \nu(\partial^2 w / \partial x^2) = 0$$

$$\text{固支时, } w=0, \partial w / \partial y = 0$$

$$\text{自由时, } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

考虑三种荷载工况,其相应的薄膜力和荷载参数  $\lambda$  分别为

$$(1) \text{ 单向受压时, } (N_x, N_y, N_{xy}) = P_x(-1, 0, 0)$$

$$(2) \text{ 双向受压时,}$$

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = -(P_x, P_y, 0) = -P_x(1, \alpha, 0)$$

$$(3) \text{ 周边剪切荷载时, } (N_x, N_y, N_{xy}) = P_{xy}(0, 0, 1)$$

#### 5.1 有限元解

通过 MATLAB 软件编写有限元程序对 FGM 板的临界荷载进行计算。首先,进行收敛性分析。考虑四边简支(SSSS)的方板,假设板的两对边

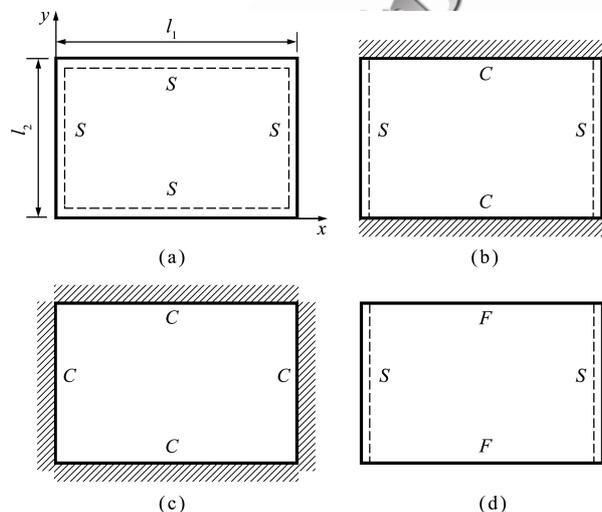


图 1 四种边界条件

Fig. 1 Four boundary conditions

( $x$ 向)受均布压力,在板边的每单位长度上为  $P_x = P$ ,则荷载参数  $\lambda = P$ 。不同网格划分下,方板的前 3 阶无量纲临界荷载  $p_{cr} = P_{cr} l_2^2 / (\pi^2 D_b)$  列入

表 1,并与文献[19]的解析解  $p_{cr} = \left[ \frac{ml_2}{l_1} + \frac{l_1}{ml_2} \right]^2$

进行比较。由表 1 可知,当网格划分为  $36 \times 36$  时,计算精度已经可以满足,当超过  $36 \times 36$  时,计算精度提高不明显,故在下面的计算中采用  $36 \times 36$  的网格划分。

表 2 为 SSSS 矩形板在周边剪切荷载 ( $P_{xy} = P$ ) 作用下的无量纲临界荷载  $p_{cr} = P_{cr} l_2^2 / (\pi^2 D_b)$ ,并与文献结果进行比较。由表 2 可知,本文所得的有限元解与已有文献结果符合较好,说明本文的有限元方法正确。

表 3 为单向受压时,不同边界条件和材料梯度指数情况下 FGM 方板的临界荷载。可以看出,在给定边界条件下,临界荷载随着材料梯度指数的增加而减小;材料梯度指数一定时,边界约束越强,临界荷载越大。

表 1 单向受压时 SSSS 方板的无量纲临界荷载  $p_{cr}$   
Tab. 1 Non-dimensional critical buckling loads of SSSS square plate with uniaxial load

模态	解析解 <sup>[19]</sup>	网格划分			
		12×12	24×24	36×36	48×48
1	4.000	3.971	3.993	3.997	3.998
2	6.249	6.178	6.232	6.242	6.245
3	11.111	10.976	11.075	11.095	11.102

表 2 周边剪切荷载作用下 SSSS 矩形板的无量纲临界荷载  $p_{cr}$

Tab. 2 Non-dimensional critical buckling loads for SSSS rectangular plates with shear loads

来源	$l_1/l_2$			
	1	1.5	2	3
本文	9.302	7.051	6.525	5.806
文献[19]	9.340	7.100	6.600	5.900
文献[20]	9.325	7.070	6.546	5.840
文献[21]	9.329	7.076	6.553	5.848

表 3 单向受压时 FGM 方板的临界荷载  $P_{cr}$   
( $l_1 = l_2 = 1$  m,  $h = 0.01$  m)

Tab. 3 Critical buckling loads for FGM square plates with uniaxial load  
( $l_1 = l_2 = 1$  m,  $h = 0.01$  m)

边界条件	$n$					
	0	1	2	5	10	$\infty$
CCCC	3.454	1.722	1.343	1.136	1.035	0.636
SSCC	2.636	1.314	1.025	0.867	0.790	0.486
SSSS	1.373	0.684	0.534	0.451	0.411	0.253
SSFF	0.327	0.163	0.127	0.108	0.098	0.060

图2为单向受压时,不同边界条件下FGM矩形板的临界荷载随长宽比的变化曲线。可以看出,在CCCC,SSCC和SSSS边界条件下,临界荷载呈波浪形变化,最终趋于平缓;在SSFF边界条件下,临界荷载呈单调递减并趋于平缓。

表4给出了双向受压时,不同边界条件和长宽比情况下FGM矩形板的临界荷载。可以看出,在SSCC边界条件下,随着长宽比的增加,临界荷载略有突变;而在其他三种边界条件下,临界荷载均单调递减。

图3给出了不同荷载工况下,SSCC边界条件FGM方板的临界荷载随着材料梯度指数变化的曲线。可以看出,周边剪切荷载作用下,临界荷载最大,其次是单向受压时,双向受压时的临界荷载最小;当 $n$ 较小时,临界荷载随着材料梯度指数急剧下降,当 $n$ 较大时,临界荷载下降较平缓。

5.2 由转换关系得到的解

由式(31)可知,若已知参考均匀板的临界荷载,就可由FGM板的临界荷载与参考均匀板临界荷载之间的相似转换关系直接计算出FGM矩形

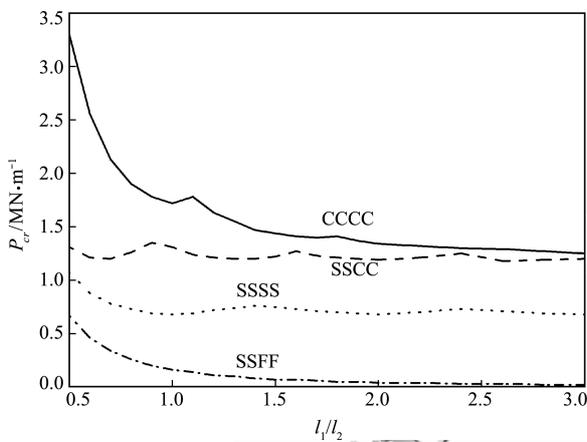


图2 单向受压时FGM矩形板的临界荷载随长宽比的变化关系( $n=1, l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )  
Fig. 2 Critical buckling loads versus the aspect ratio for FGM rectangular plates with uniaxial load ( $n=1, l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )

表4 双向受压时FGM矩形板的临界荷载  $P_{cr}$  ( $n=1, l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )

Tab. 4 Critical buckling loads for FGM rectangular plates with biaxial load ( $n=1, l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )

边界条件	$l_1/l_2$					
	0.5	0.7	1	1.4	2	3
CCCC	2.682	1.461	0.906	0.721	0.670	0.657
SSCC	1.013	0.748	0.655	0.643	0.654	0.642
SSSS	0.855	0.520	0.342	0.258	0.214	0.190
SSFF	0.653	0.330	0.160	0.081	0.039	0.017

板的临界荷载。表5为单向受压时,三种边界条件下由转换关系得到的FGM板的临界荷载,并与本文的有限元解和文献[4]的结果进行了比较。由表5可知,转换关系得到的结果与有限元解和文献结果吻合得非常好,验证了相似转换关系的存在及其正确性。

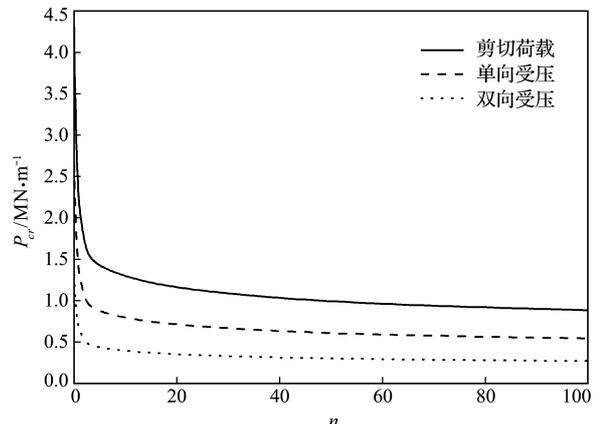


图3 SSCC边界条件FGM方板的临界荷载随材料梯度指数的变化关系( $l_1=l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )  
Fig. 3 Critical buckling loads versus the power law for SSCC FGM square plates ( $l_1=l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )

表5 单向受压时由转换关系得到的FGM矩形板的临界荷载  $P_{cr}$  ( $n=1, l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )

Tab. 5 Critical buckling loads obtained from transformation relation for FGM rectangular plates with uniaxial loads ( $n=1, l_2=1\text{ m}, h=0.01\text{ m}$ )

边界条件	$l_1/l_2$	转换解	有限元解	文献[4]
SSCC	0.5	1.317	1.315	1.317
	1.0	1.317	1.314	1.317
	1.5	1.216	1.215	1.218
SSSS	0.5	1.070	1.069	1.070
	1.0	0.685	0.684	0.685
	1.5	0.742	0.742	0.743
SSFF	0.5	0.666	0.667	0.666
	1.0	0.163	0.163	0.163
	1.5	0.071	0.071	0.071

6 结论

基于经典板理论,引入物理中面概念,利用最小势能原理推导了FGM板屈曲的有限元控制方程。利用FGM板的屈曲方程与参考均匀板屈曲方程之间的相似性,得到了FGM板的临界荷载与参考均匀板的临界荷载之间的相似转换关系,从而将FGM板临界荷载的计算转变为参考均匀板的临界荷载及其材料不均匀系数的计算。通过数值算例,分析了边界条件、荷载工况、材料梯度指数和长宽比等对FGM板临界荷载的影响,得到以下结

论。随着材料梯度指数的增加即金属组分的增加, FGM 板的临界荷载减小;边界约束条件越强,临界荷载越大;随着板的长宽比的增加,临界荷载总体趋势是减小的,但单向受压和双向受压时 SSCC 边界条件 FGM 板的临界荷载略有突变;周边剪切荷载作用下的临界荷载最大,单向受压时次之,双向受压时最小。

### 参考文献(References):

- [1] Javaheri R, Eslami M R. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading [J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2002, **82**(4): 277-283.
- [2] Shariat B A S, Javaheri R, Eslami M R. Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading [J]. *Thin-Walled Structures*, 2005, **43**(7): 1020-1036.
- [3] Yu L H, Wang C Y. Buckling of rectangular plates on an elastic foundation using the Levy method [J]. *AIAA Journal*, 2008, **46**(12): 3163-3167.
- [4] Mohammadi M, Saidi A R, Jomehzadeh E. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates [J]. *Applied Composite Materials*, 2010, **17**(2): 81-93.
- [5] Asemi K, Shariyat M, Salehi M, et al. A full compatible three-dimensional elasticity element for buckling analysis of FGM rectangular plates subjected to various combinations of biaxial normal and shear loads [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, **74**: 9-21.
- [6] Yang J, Liew K M, Kitipornchai S. Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates [J]. *Composites Science and Technology*, 2005, **65**(7-8): 1165-1175.
- [7] Zhao X, Lee Y Y, Liew K M. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates [J]. *Composite Structures*, 2009, **90**(2): 161-171.
- [8] Naderi A, Saidi A R. On pre-buckling configuration of functionally graded Mindlin rectangular plates [J]. *Mechanics Research Communications*, 2010, **37**(6): 535-538.
- [9] Mohammadi M, Saidi A R, Jomehzadeh E. A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2010, **224**(9): 1831-1841.
- [10] Nguyen-Xuan H, Tran L V, Nguyen-Thoi T, et al. Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method [J]. *Composite Structures*, 2011, **93**(11): 3019-3039.
- [11] Reddy J N. Analysis of functionally graded plates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **47**(1-3): 663-684.
- [12] Bodaghi M, Saidi A R. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, **34**(11): 3659-3673.
- [13] Thai H T, Choi D H. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, **36**(3): 1008-1022.
- [14] Zenkour A M, Aljadani M H. Mechanical buckling of functionally graded plates using a refined higher-order shear and normal deformation plate theory [J]. *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 2018, **5**(6): 615-632.
- [15] Singh S J, Harsha S P. Buckling analysis of FGM plates under uniform, linear and non-linear in-plane loading [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2019, **33**(4): 1761-1767.
- [16] 张大光. 基于物理中面功能梯度材料板壳结构分析 [D]. 兰州大学, 2010. (ZHANG Da-guang. A Theoretical Analysis of FGM Plates and Shells Based on Physical Neutral Surface [D]. Lanzhou University, 2010. (in Chinese))
- [17] Zhang D G, Zhou Y H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface [J]. *Computational Materials Science*, 2008, **44**(2): 716-720.
- [18] Latifi M, Farhatnia F, Kadkhodaei M. Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2013, **41**: 16-27.
- [19] Timoshenko S, Gere J. *Theory of Elastic Stability* [M]. New York: McGrawHill, 1961.
- [20] Shufrin I, Eisenberger M. Shear buckling of thin plates with constant in-plane stresses [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2007, **7**(2): 179-192.
- [21] Wu L Y, Wu C H, Huang H H. Shear buckling of thin plates using the spline collocation method [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2008, **8**(4): 645-664.

## Finite element analysis for the buckling of functionally graded material plates based on physical neutral surface

SUN Yun<sup>\*</sup>, CHEN Jiang, LI Shi-rong

(School of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China)

**Abstract:** This paper presents the analysis of the buckling of the FGM (Functionally Graded Materials) thin plates based on the physical neutral surface. Based on the principle of minimum potential energy, the finite element forms of the governing equations are derived and then the critical buckling load is determined. Considering the similarity between the buckling equation of the FGM plate and that of the reference uniform plate, the relationship between the critical load of the FGM plate and that of the reference uniform plate is established. Then the calculation of the critical load of the FGM plate is transformed into the calculation of the critical load of the reference uniform plate and the inhomogeneity coefficient of the material. This work can greatly improve the computational efficiency and plays an active role in the promotion of the FGM. The results obtained by the finite element method and the transformation relation are compared. The effect of the boundary condition, load condition, material component and geometry on the critical load is also discussed.

**Key words:** physical neutral surface; FGM thin plate; buckling; finite element method; transformation relation

<http://www.cjcm.net>

引用本文/Cite this paper:

孙云, 陈江, 李世荣. 基于物理中面 FGM 板屈曲的有限元分析[J]. 计算力学学报, 2020, 37(5): 560-566.

SUN Yun, CHEN Jiang, LI Shi-rong. Finite element analysis for the buckling of functionally graded material plates based on physical neutral surface[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, 37(5): 560-566.