

DOI: 10.7511/jslx20190402001

基于等几何有限元法的功能梯度微板 热力耦合屈曲预测

邓 阳, 尹硕辉*, 赵子衡

(湘潭大学 机械工程学院, 湘潭 411105)

摘要: 基于修正偶应力理论和 Kirchhoff 板理论, 建立了功能梯度微板热力耦合屈曲等几何有限元模型。该模型仅包含一个材料尺度参数, 能够描述尺度效应现象, 且满足修正偶应力理论的高阶连续性要求。基于虚功原理推导了功能梯度微板热力耦合屈曲等几何有限元方程。通过对板的典型算例分析, 讨论了材料尺度参数、边长比及梯度指数对板稳定性的影响。结果表明, 本文模型预测的屈曲载荷总是大于宏观理论的结果, 即捕捉到了尺度效应现象; 随着临界屈曲力的增加, 临界屈曲热载荷线性减少; 此外, 边长比和梯度指数也对微板的稳定性产生一定影响。

关键词: 热力耦合屈曲; 等几何有限元法; 功能梯度材料; 修正偶应力理论; 尺度效应

中图分类号: TB34; O242.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2020)05-0553-07

1 引言

功能梯度材料是一种通过连续改变组分材料分布, 使自身整体性能呈现梯度变化的非均质复合材料。该材料使结构具有高耐热性、高强度和高刚度等优点, 因此在航空航天、生物医疗和机械等领域得到了广泛应用。

随着现代微机电技术的发展, 功能梯度材料已经应用于微观结构^[1]和系统^[2]中。实验表明, 当结构的尺寸处于微米量级($1\ \mu\text{m} \sim 100\ \mu\text{m}$)时, 结构将表现出比宏观尺度下更高的刚度, 即尺度效应现象^[3,4]。传统连续介质理论无法解释这种现象, 因此, 人们发展了非局部弹性理论^[5]和偶应力理论^[6]等高阶连续介质理论。其中, Yang 等^[7]基于传统的偶应力理论, 提出了一种适用于各向同性材料且仅有一个材料尺度参数的修正偶应力理论。Tsiatas^[8]基于该理论建立了 Kirchhoff 微板模型, 该模型能用于分析任意几何形状和复杂边界条件的微板静力学问题; Park 等^[9]分析了尺度效应对微悬臂梁弯曲刚度的影响。陈万吉等^[10]将该理论推广至各向异性材料, 提出了新修正偶应力理论。基于该理论, 贺丹等^[11,12]建立了各向异性功能梯度微

板模型。

目前, 国内外学者仅考虑了单一物理场中微结构的力学性能。然而, 在一些特定的应用环境中, 微结构会受到多种物理场作用。因此, 亟需研究多场作用下微结构的力学问题。Tan 等^[13]在热力耦合环境下, 研究了尺度效应对层合悬臂微梁弯曲挠度的影响; Jia 等^[14]同时考虑了温度、静电力和分子间作用力的影响, 建立了功能梯度微梁的非线性屈曲模型。

由于偶应力中存在高阶项, 采用常规有限元法构造高阶连续单元较复杂。等几何有限元法是由 Hughes 等^[15]提出的一种新型高阶数值计算方法。该方法是基于有限元法等参单元的思想, 直接采用 CAD 几何建模的非均匀有理 B 样条(NURBS)基函数作为有限元法中的形函数, 从而实现 CAD 与 CAE 的无缝连接。与常规有限元法相比, 等几何有限元法能够轻松构造高阶连续函数, 精确地表示几何形状。该数值方法在求解考虑偶应力的微尺度模型中已经得到了成功应用^[16,17]。

本文结合修正偶应力理论及等几何有限元法, 建立了 Kirchhoff 功能梯度微板热力耦合屈曲模型。研究了热力耦合环境下, 材料尺度参数、板的边长比及梯度指数对功能梯度微板稳定性的影响。

2 基本方程

2.1 功能梯度材料模型

组分材料的连续改变导致功能梯度材料的物

收稿日期: 2019-04-02; 修改稿收到日期: 2019-08-18.

基金项目: 国家自然科学基金(11802261; 11802258)

资助项目.

作者简介: 尹硕辉*(1988-), 男, 博士, 副教授

(E-mail: yinsh2016@163.com).

性参数呈梯度变化。为了描述物性参数的这种变化,已经提出了一些数学模型。本文采用的幂函数模型^[18]表示为

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n & (-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}) \\ p(z) = (p_1 - p_2) \times V_1 + p_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中下标 1,2 表示不同材料; V_1 为材料 1 的体积分数; h 为板的厚度; n 为材料的梯度指数; $p(z)$ 表示功能梯度材料的杨氏模量 E 、热膨胀系数 α 和泊松比 ν 等物性参数。本文泊松比 ν 假设为常数。

2.2 Kirchhoff 板理论

根据 Kirchhoff 板理论,位移场表示为

$$\begin{cases} u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3 = w \end{cases} \quad (2)$$

式中 u_1, u_2 和 u_3 是 x, y 和 z 方向的三个位移分量; 基于 Kirchhoff 板理论,转角是挠度对坐标的导数,因此 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 分别是板中面法线相对 x 轴和 y 轴的转角; u, v 和 w 为中面位移,且是关于 x 和 y 坐标的函数。

2.3 修正偶应力理论

根据修正偶应力理论,各向同性材料的线弹性本构关系表示为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \end{cases} \quad (3)$$

式中 σ_{ij} 是应力张量, m_{ij} 是偶应力张量, δ_{ij} 是克罗内克符号, ϵ_{ij} 是应变张量, χ_{ij} 是旋转梯度张量, l 是材料尺度参数,通常由实验测得,拉梅系数 λ 和 μ 表示为

$$\lambda = \frac{\nu E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

式中杨氏模量 $E(z)$ 沿着板的厚度方向变化; ν 是泊松比。

应变张量 ϵ_{ij} 和旋转梯度张量 χ_{ij} 表示为

$$\begin{cases} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \end{cases} \quad (5)$$

式中 u_i 是位移矢量,转动矢量 θ_i 表示为

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (6)$$

其中 e_{ijk} 是置换符号。

将式(2,6)代入式(5),并考虑热载荷 ΔT 引起

的变形,则应变张量和旋转梯度张量表示为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_p + z \boldsymbol{\epsilon}_b - \boldsymbol{\epsilon}_t \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \chi_{13} \\ \chi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ 0.5 \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ 0.5 \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 $\boldsymbol{\epsilon}_p = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T$

$$\boldsymbol{\epsilon}_b = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \alpha(z) \Delta T [1 \quad 1 \quad 0]^T$$

式中 $\boldsymbol{\epsilon}_p$ 为中面的伸缩剪切应变, $\boldsymbol{\epsilon}_b$ 为中面的弯扭应变, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ 为温度引起的应变, $\alpha(z)$ 为沿着板的厚度方向变化的热膨胀系数。

3 等几何有限元法

3.1 节点矢量和 B 样条基函数

节点矢量 $\mathbf{U} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 是由一维参数空间中一系列单调递增的坐标值组成,其中 ξ_i 表示第 i 个节点的坐标值 ($i=1, 2, \dots, n+p+1$); p 是 B 样条基函数的阶次; n 是 B 样条基函数的数量 (与控制点数量相同)。根据节点矢量 \mathbf{U} , ξ 方向的 p 阶 B 样条基函数 $N_{i,p}(\xi)$ 表示为

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (10)$$

3.2 NURBS 基函数

给定 ξ 方向的节点矢量 $\mathbf{U} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 和 η 方向的节点矢量 $\mathbf{V} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, 采用张量形式可以得到二维问题的 NURBS 基函数为

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \omega_{i,j}} \quad (11)$$

式中 $\omega_{i,j}$ 是权系数, $N_{i,p}(\xi)$ 和 $N_{j,q}(\eta)$ 分别是由 ξ 和 η 方向的节点矢量 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 按照式(9,10)构成的 p 阶和 q 阶 B 样条基函数, n 和 m 分别是各自方向

上 B 样条基函数的数量。

3.3 等几何有限元位移模式

等几何有限元法是在有限元法的框架下,采用 CAD 中构造几何形状的非均匀有理 B 样条 (NURBS) 基函数作为有限元法中的形函数,位移场近似表示为

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{NP} R_I \mathbf{u}_I \quad (12)$$

式中 $\mathbf{u}_I = [u_I \ v_I \ w_I]^T$ 表示单元内第 I 个控制节点的自由度, $NP = (p+1)(q+1)$ 为单元控制点总数, R_I 是 NURBS 基函数。

将式(12)代入式(7,8)得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{B}_p \mathbf{u}_I, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_I, \quad \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_I \quad (13,14,15)$$

式中 \mathbf{B}_p 为伸缩剪切应变矩阵, \mathbf{B}_b 为弯扭应变矩阵, \mathbf{B}_m 为旋转梯度矩阵。

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} R_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{I,y} & 0 \\ R_{I,y} & R_{I,x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R_{I,xx} \\ 0 & 0 & -R_{I,yy} \\ 0 & 0 & -2R_{I,xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,xy} \\ 0 & 0 & -R_{I,xy} \\ 0 & 0 & R_{I,yy} - R_{I,xx} \\ -0.5R_{I,xy} & 0.5R_{I,xx} & 0 \\ -0.5R_{I,yy} & 0.5R_{I,xy} & 0 \end{bmatrix}$$

式中 $R_{I,x}$ 和 $R_{I,y}$ 分别为 NURBS 基函数对坐标 x 和 y 的一阶偏导数, $R_{I,xx}$, $R_{I,yy}$ 和 $R_{I,xy}$ 分别为 NURBS 基函数对坐标 x 和 y 的二阶偏导数。

4 热力耦合屈曲等几何有限元方程

基于修正偶应力理论,应变能表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (16)$$

将式(3,7,8)代入式(16)得

$$U = \frac{1}{2} \int_V \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \end{bmatrix} dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\chi} dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_t dV - 2 \int_V \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t dV \quad (17)$$

式中 $(\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}) = \mathbf{D}(1 \ z \ z^2)$

$$\mathbf{D} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_m = 2\mu l^2 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

外力做功表示为

$$W = \frac{1}{2} \int_V \begin{bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{ox} & \sigma_{oxy} \\ \sigma_{oxy} & \sigma_{oy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix} dV + \frac{1}{2} \int_V \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{1-\nu} & 0 \\ 0 & \frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dV \quad (18)$$

由虚功原理:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad (19)$$

将式(17,18)代入式(19),得到功能梯度微板热力耦合屈曲等几何有限元方程为

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_m - N_{cr} \mathbf{K}_{GN} - \Delta T \mathbf{K}_{GT}) \mathbf{d} = 0 \quad (20)$$

式中 \mathbf{K} 为传统刚度矩阵, \mathbf{K}_m 为与尺度效应相关的刚度矩阵, N_{cr} 为临界屈曲力, ΔT 为临界屈曲热载荷, \mathbf{K}_{GT} 与 \mathbf{K}_{GN} 为几何刚度矩阵。具体表示为

$$\mathbf{K}_m = \int_V \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m dV, \quad \mathbf{K} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} dV$$

$$\mathbf{K}_{GN} = \int_V \mathbf{B}_V^T \begin{bmatrix} \sigma_{ox} & \sigma_{oxy} \\ \sigma_{oxy} & \sigma_{oy} \end{bmatrix} \mathbf{B}_V dV$$

$$\mathbf{K}_{GT} = \int_V \mathbf{B}_V^T \begin{bmatrix} \frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{1-\nu} & 0 \\ 0 & \frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{1-\nu} \end{bmatrix} \mathbf{B}_V dV$$

$$\mathbf{B}_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,x} \\ 0 & 0 & R_{I,y} \end{bmatrix}$$

5 数值算例

考虑如图 1 所示的微板,长度 a ,宽度 b ,受到均布热载荷及双向均布压力的作用。为了方便表示微板的边界条件,用 C 表示板边固支约束, S 表示板边简支约束。

5.1 收敛性及正确性验证

为了验证模型的收敛性,本文模型退化为功能梯度微板力屈曲模型。其中,板的长和宽取为

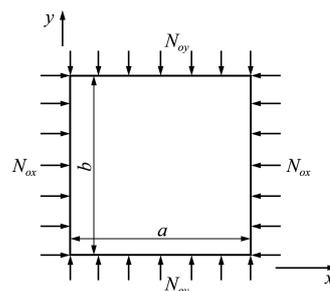


图 1 受双向均布压力的功能梯度微板
Fig. 1 FG micro plates under biaxial uniform pressure

$a=b=10h$,板的厚度 $h=17.6 \mu\text{m}$,材料尺度参数 $l=h$,梯度指数 $n=1$,弹性模量 $E_c=14.4 \text{ GPa}$, $E_m=1.44 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.38$,临界屈曲力的归一化公式为 $N^*=N_{cr}b^2/E_mh^3$ 。图2为单元控制点数量和NURBS基函数阶次对模型预测结果误差的影响。其中, $\text{Error}=(N^*-N)/N$, N^* 为目前模型预测的结果, N 为解析解。可以看出,当NURBS基函数阶次 $p=1$ 时,本文模型预测结果的相对误差很大;当 $p \geq 2$ 时,随着单元控制点数量的增加,本文模型十分迅速地收敛到一个较小的相对误差。通过权衡计算精度与效率,本文后续算例的控制点数将采用 16×16 ,NURBS基函数阶次 $p=q=3$ 。从两个不同角度验证本文模型正确性。通过继续使用上述参数和归一化公式,将本文模型预测的临界屈曲力与文献[19,20]的结果对比,由表1可知,本文模型的预测结果与文献结果吻合较好。

当临界屈曲力 $N_{cr}=0$ 时,本文模型退化为功能梯度微板热屈曲模型。其中,板的长和宽取为 $a=b=100h$,板厚度 $h=17.6 \mu\text{m}$,材料尺度参数 $l=h$,梯度指数 $n=1$,弹性模量 $E_c=380 \text{ GPa}$, $E_m=70 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,热膨胀系数 $\alpha_c=7.4 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $\alpha_m=23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。将本文模型预测的临界屈曲热载荷与文献[20]结果对比,由表2可知,本文模型的预测结果与文献结果吻合良

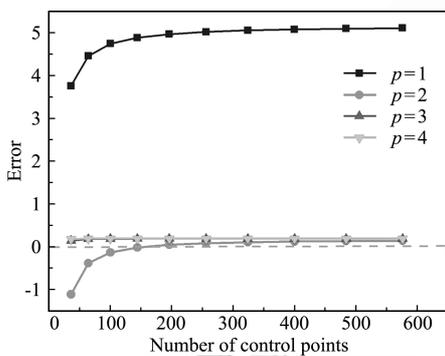


图2 控制点数量及基函数阶次对预测结果误差的影响
Fig. 2 Influence of the basis function order and the number of the control point for the errors of the predicted results

表1 本文模型预测的临界屈曲力与文献[19,20]结果的对比

Tab. 1 Comparison of the critical buckling load by this model and Ref. [19,20]

n	l/h=0			l/h=1		
	Present	SFSM ^[20]	Navier ^[19]	Present	SFSM ^[20]	Navier ^[19]
0	19.2255	19.2255	19.2255	90.7446	90.7444	90.7444
1	8.1841	8.2145	8.2145	47.3623	47.5499	47.5499
10	3.8121	3.8358	3.8359	16.7166	16.8393	16.8393

好,证明了本文模型的正确性。

5.2 材料尺度参数对功能梯(Al/Al₂O₃)微板稳定性的影响

研究热力耦合环境中,材料尺度参数对功能梯度(Al/Al₂O₃)微板稳定性的影响。其中,微板的长和宽为 $a=b=20h$,板厚 $h=17.6 \mu\text{m}$,梯度指数 $n=1$,弹性模量 $E_c=380 \text{ GPa}$, $E_m=70 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,热膨胀系数 $\alpha_c=7.4 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $\alpha_m=23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。临界屈曲力 N_{cr} 和临界屈曲热载荷 ΔT 的归一化公式为 $N^*=N_{cr}b/E_mh^2$, $T^*=\alpha_m \Delta T b/h$ 。图3显示了材料尺度参数对功能梯度

表2 本文模型预测的临界屈曲热载荷与文献[20]结果的对比

Tab. 2 Comparison of the critical buckling thermal load by this model and Ref. [20]

l/h	SSSS		CCCC		
	Present	SFSM ^[20]	Present	SFSM ^[20]	
n=0	0	17.0991	17.0992	45.3462	45.3471
	0.5	35.0533	35.0583	92.9598	92.9616
	1	88.9156	88.9157	235.8004	235.8052
n=1	0	7.9436	7.9438	21.0654	21.0670
	0.5	17.8517	17.8522	47.3402	47.3442
	1	47.5761	47.5774	126.1645	126.1756
n=5	0	7.2663	7.2657	19.2687	19.2688
	0.5	14.6922	14.6920	38.9604	38.9633
	1	36.9699	36.9707	98.0355	98.0467

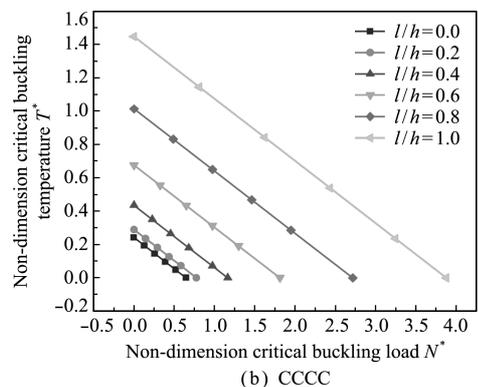
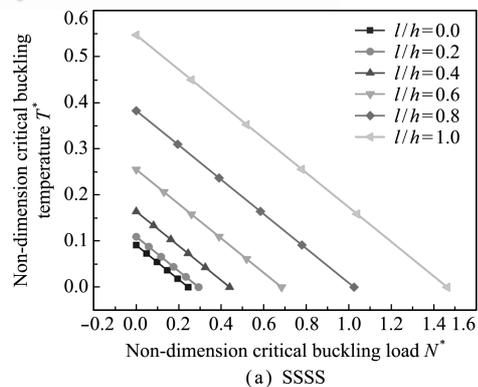


图3 材料尺度参数对功能梯度(Al/Al₂O₃)微板稳定性的影响
Fig. 3 Influence of the material scale parameter for the stability of FG (Al/Al₂O₃) micro plate

微板稳定性的影响。

可以看出,在相同边界条件下,本文模型预测的临界屈曲载荷($l/h \neq 0$)大于宏观理论($l/h = 0$)的预测结果,此时微板表现出比宏观状态下更高的刚度;随着板厚度 h 增加,尺度效应逐渐减弱;当板厚度 h 远大于材料尺度参数 l 时,尺度效应消失,此时本文模型将退化为宏观理论模型($l/h = 0$);当 l/h 不变时,CCCC 功能梯度板的临界屈曲载荷大约是 SSSS 功能梯度板的临界屈曲载荷的两至三倍;功能梯度微板的临界屈曲热载荷随着临界屈曲力的增加呈线性递减。以图 3(a)中 $l/h = 1$ 为例,根据最小二乘法拟合,这种线性关系可以表示为 $T^* = -0.3735 N^* + 0.5468$ 。

5.3 边长比对功能梯度(Al/Al_2O_3)微板稳定性的影响

图 4 为在热力耦合环境中,边长比对功能梯度(Al/Al_2O_3)微板稳定性的影响。其中 $l/h = 1$,板的几何尺寸、材料参数以及归一化处理与 5.2 节相同。可以看出,在相同的边界条件下,功能梯度微板的临界屈曲载荷随着边长比的增加而逐渐增大;从图 4(b)可以看出,当 $b/a \leq 4$ 时,边长比的增加对 CCCC 板的稳定性有显著提升;当 $b/a \geq 4$ 时,

边长比的增加对板稳定性的影响较小;当边长比不变时,CCCC 功能梯度微板的临界屈曲载荷总高于 SSSS 功能梯度微板的临界屈曲载荷;功能梯度微板的临界屈曲热载荷随着临界屈曲力的增加呈线性递减。以图 4(a)中 $b/a = 5$ 为例,根据最小二乘法拟合,这种线性关系可以表示为 $T^* = -0.3736 N^* + 7.0318$ 。

5.4 梯度指数对功能梯度(Al/Al_2O_3)微板稳定性的影响

考虑梯度指数对功能梯度(Al/Al_2O_3)微板稳定性的影响,其中 $l/h = 1$,板的几何尺寸、材料参数以及归一化处理与 5.2 节相同。可以看出,当 $n = 0$ 时板的稳定性最好,此时微板完全由陶瓷材料(Al_2O_3)构成,表明陶瓷材料具有更好的耐热性和抗屈曲能力;当梯度指数 $n = 1$ 时,板的稳定性显著下降;随着梯度指数升高,金属材料(Al)所占的比例不断增加,板的稳定性不断降低;当固定梯度指数 n 时,CCCC 功能梯度微板的临界屈曲载荷总高于 SSSS 功能梯度微板的临界屈曲载荷;功能梯度微板的临界屈曲热载荷随着临界屈曲力的增加而线性减少。以图 5(a)中 $n = 1$ 为例,根据最小二乘法拟合,这种线性关系可以表示为 $T^* = -0.3735 N^* + 0.5468$ 。

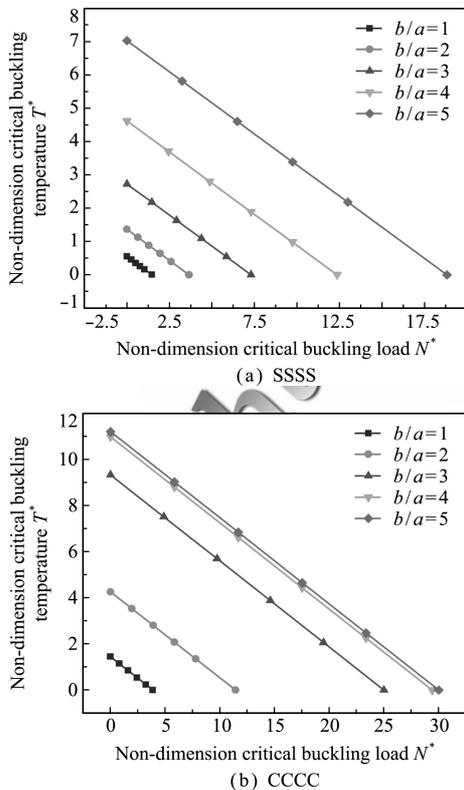


图 4 边长比对功能梯度(Al/Al_2O_3)微板稳定性的影响
Fig. 4 Influence of the aspect for the stability of FG (Al/Al_2O_3) micro plate

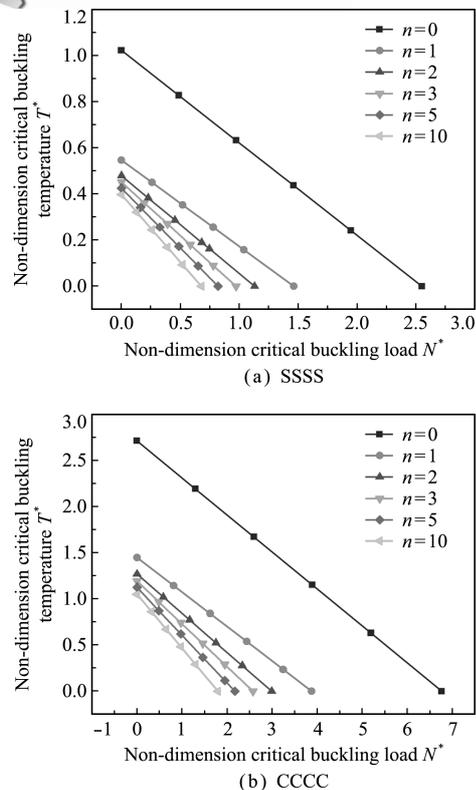


图 5 梯度指数对功能梯度(Al/Al_2O_3)微板稳定性的影响
Fig. 5 Influence of the gradient index for the stability of FG (Al/Al_2O_3) micro plate

6 结 论

基于修正偶应力理论,建立了功能梯度 Kirchhoff 微板热力耦合屈曲模型,并采用等几何有限元法求解。算例结果表明,本文模型预测的临界屈曲载荷总大于宏观理论预测的结果,说明本文模型捕捉到了尺度效应现象;随着板厚度减小,尺度效应现象更加显著,从而使功能梯度(Al/Al_2O_3)板表现出更高的刚度,提升了微板的稳定性;随着临界屈曲力的增加,临界屈曲热载荷呈线性递减;功能梯度(Al/Al_2O_3)微板的临界屈曲载荷随着板边长比的增加而逐渐增加。此外,梯度指数和边长比也对微板的稳定性产生一定影响。

参考文献(References):

- [1] Lu C F, Wu D Z, Chen W Q. Nonlinear responses of nanoscale FGM films including the effects of surface energies[J]. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 2011, **10**(6): 1321-1327.
- [2] Witvrouw A, Mehta A. The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications[J]. *Materials Science Forum*, 2005, **492-493**: 255-260.
- [3] Sölken J S, Evans A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale[J]. *Acta Materialia*, 1998, **46**(14): 5109-5115.
- [4] Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment[J]. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, **42**(2): 475-487.
- [5] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, **54**(9): 4703-4710.
- [6] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [7] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10): 2731-2743.
- [8] Tsiatas G C. A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(13): 2757-2764.
- [9] Park S K, Gao X L. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006, **16**(11): 2355-2359.
- [10] Chen W J, Li L, Ma X. A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation [J]. *Composite Structures*, 2011, **93**(11): 2723-2732.
- [11] 贺丹, 门亮. 碳纳米管增强型复合材料功能梯度板的自由振动模型与尺度效应[J]. *计算力学学报*, 2018, **35**(3): 326-330. (HE Dan, MEN Liang. A free vibration model of carbon nanotube-reinforced functionally graded composite plates and scale effects[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, **35**(3): 326-330. (in Chinese))
- [12] 杨子豪, 贺丹. 基于精化锯齿理论的功能梯度夹心微板静弯曲模型[J]. *计算力学学报*, 2018, **35**(6): 757-762. (YANG Zi-hao, HE Dan. Static bending model of functionally graded sandwich micro-plates based on the Refined Zigzag Theory [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, **35**(6): 757-762. (in Chinese))
- [13] Tan Z Q, Chen Y C. Size-dependent electro-thermo-mechanical analysis of multilayer cantilever microactuators by Joule heating using the modified couple stress theory[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, **161**: 183-189.
- [14] Jia X L, Ke L L, Zhong X L, et al. Thermal-mechanical-electrical buckling behavior of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory [J]. *Composite Structures*, 2018, **202**: 625-634.
- [15] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39-41): 4135-4195.
- [16] Liu S, Yu T, Bui T Q, et al. Size-dependent analysis of homogeneous and functionally graded microplates using IGA and a non-classical Kirchhoff plate theory [J]. *Composite Structures*, 2017, **172**: 34-44.
- [17] Liu S, Yu T, Bui T Q. Size effects of functionally graded moderately thick microplates: A novel non-classical simple-FSDT isogeometric analysis [J]. *European Journal of Mechanics-A/ Solids*, 2017, **66**: 446-458.
- [18] Swaminathan K, Sangeetha D M. Thermal analysis of FGM plates — a critical review of various modeling techniques and solution methods [J]. *Composite Structures*, 2017, **160**: 43-60.
- [19] Thai H T, Choi D H. Size-dependent functionally gra-

ded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory[J]. *Composite Structures*,2013,**95**:142-153.

[20] Mirsalehi M, Azhari M, Amoushahi H. Stability of

thin FGM microplate subjected to mechanical and thermal loading based on the modified couple stress theory and spline finite strip method[J]. *Aerospace Science and Technology*,2015,**47**:356-366.

Thermal-mechanical buckling analysis of functionally graded micro plates using isogeometric finite element method

DENG Yang, YIN Shuo-hui*, ZHAO Zi-heng

(School of Mechanical Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: Based on the modified couple stress theory (MCST) in conjunction with the Kirchhoff plate theory, an isogeometric finite element model for thermal-mechanical buckling analysis of functionally graded (FG) micro plates was presented. This model only had one material length scale parameter, which was able to capture the size effect, and satisfied the requirement of the MCST for high-order continuity. The principle of virtual work was employed to derive isogeometric finite element equations of the thermal-mechanical buckling of FG micro plates. In order to investigate the effects of the material scale parameter, the aspect ratio and the gradient index on the thermal-mechanical stability of FG micro plates, a typical FG micro plates under thermal-mechanical loads was taken as an illustrative example. The results reveal that the critical buckling predicted by the present method is larger than that of the classical one, which means the size effect can be captured; with the increase of the critical mechanical load, the critical thermal load is decreasing linearly. Meanwhile, the aspect ratio and the gradient index also have some effects on the stability of micro plates.

Key words: thermal-mechanical buckling; isogeometric finite element method; functionally graded material; modified couple stress theory; size effect

引用本文/Cite this paper:

邓 阳,尹硕辉,赵子衡. 基于等几何有限元法的功能梯度微板热力耦合屈曲预测[J]. 计算力学学报,2020,**37**(5):553-559.

DENG Yang, YIN Shuo-hui, ZHAO Zi-heng. Thermal-mechanical buckling analysis of functionally graded micro plates using isogeometric finite element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2020,**37**(5):553-559.