

# 基于谱元法的空间刚架动力学特性分析

鄂林仲阳\*, 杜强, 李上明

(中国工程物理研究院 总体工程研究所, 绵阳 621900)

**摘要:**以空间刚架结构为研究对象,应用谱元法研究其动力学特性,依次推导出杆、轴和铁木辛柯梁的动力学刚度阵,进而得到空间刚架的动力学刚度阵和频域响应的理论方程,拓展了谱元法应用范围。编程计算获得空间刚架的固有频率和点的谐响应曲线,与有限元分析相比较,进一步得到载荷下的瞬态响应。研究表明,谱元法在刚架结构的动力学特性分析中,比有限元方法高效高精度,更适宜解决中高频振动问题。

**关键词:**谱元法;空间刚架;固有频率;谐响应;瞬态响应

**中图分类号:**O327 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2016)05-0802-05

## 1 引言

有限元法广泛应用于结构力学性能计算,然而对复杂结构动力学问题,需划分大量单元来保证精度,这将降低计算效率,增加计算成本。谱元法<sup>[1,2]</sup>对结构的运动方程波动解进行分析,得到动力学刚度阵和精确频域解<sup>[3]</sup>,相同材质、形状规则的均匀连续结构即为一个谱单元,再对频域响应进行IFFT,得到时域响应,有效提高了计算精度,并节约了时间。

各国学者在基本结构单元基础上,采用谱元法研究了杆梁、板壳和桁架等结构的建模和动力学问题,如考虑一阶剪切变形的层合梁<sup>[4]</sup>、含主动约束阻尼层的多层梁的建模<sup>[5]</sup>、功能梯度梁高频声波传播特性<sup>[6]</sup>、变截面梁精确动态刚度阵<sup>[7]</sup>、功能梯度杆及其纵向运动的动力学和波动特性<sup>[8]</sup>、阶梯式变厚度矩形板自由振动<sup>[9]</sup>、含波纹层的夹芯板振动带隙问题<sup>[10]</sup>、垂直弹簧连接的平行梁<sup>[11]</sup>、点阵梁结构<sup>[12]</sup>、含铰链的桁架<sup>[13]</sup>、基于拉普拉斯变换的谱元法框架<sup>[14]</sup>以及移动荷载作用下桥梁动态响应<sup>[15]</sup>。未见基于谱元法分析考虑剪切变形的空间刚架动力学特性。

本文应用谱元法依次推导出杆、轴、铁木辛柯梁和空间刚架结构的动力学刚度阵。计算得到空间刚架的固有频率和谐响应,与有限元分析比较,

验证了谱元法的有效精确性,并进一步分析了矩形脉冲载荷作用下结构瞬态响应。

## 2 空间刚架谱元法分析

空间刚架是工程结构常见形式,其结构具有较高的稳定性和简单的构型,可承受拉压弯曲,广泛应用于土木建筑及航空航天领域,诸如空间机械伸展臂和空间站支撑骨架等,对其动力学特性的研究是必要的,图1为空间刚架结构示意图。

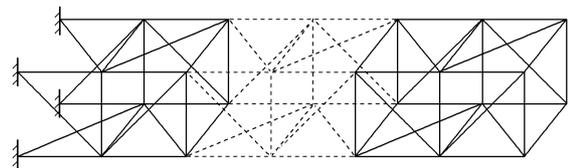


图1 空间刚架结构示意图  
Fig. 1 Schematic diagram of space frame structure

### 2.1 杆的轴向振动

杆的轴向运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中  $u(x, t)$  为轴向位移,  $x$  为轴向坐标,  $c_r = \sqrt{E/\rho}$  为波速,  $E$  和  $\rho$  分别为弹性模量和密度,  $t$  为时间。

通过傅里叶变换,得到轴向运动的频域方程通解形式为

$$U = A_1 e^{-ik_r x} + A_2 e^{ik_r x} \quad (2)$$

式中  $U(x, \omega)$  为轴向位移谱分量,  $A_1(\omega)$  和  $A_2(\omega)$  与频率相关,  $i$  为虚数,  $k_r$  为波数,  $k_r = \omega/c_r$ ,  $\omega$  为圆频率。

收稿日期:2015-05-10;修改稿收到日期:2015-09-07.

基金项目:中国工程物理研究院总体工程研究所创新发展基金(13cxj35)资助项目.

作者简介:鄂林仲阳\*(1988-),男,硕士,助理研究员  
(E-mail:lxelinzy@caep.cn).

代入节点位移得到

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sin[k_r(L-x)]}{\sin(k_r L)} & \frac{\sin(k_r x)}{\sin(k_r L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $L$  为杆的长度,  $U_1$  和  $U_2$  为节点位移谱分量。

根据轴向力和位移关系,得节点力与节点位移间关系式为

$$[F_1 \quad F_2]^T = S_r [U_1 \quad U_2]^T \quad (4)$$

$$S_r = \frac{k_r EA}{\sin(k_r L)} \begin{bmatrix} \cos(k_r L) & -1 \\ -1 & \cos(k_r L) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中  $F_1$  和  $F_2$  为节点力的谱分量,  $S_r(\omega)$  为杆的动力学刚度阵。

### 2.2 轴的扭转振动

轴的扭转运动方程和杆的轴向运动方程形式相同,动力学刚度阵也大致相同,运动方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

式中  $\phi(x, t)$  为扭转角度,  $c_a = \sqrt{G/\rho}$  为扭转波速,  $G$  为剪切模量。

轴的任意轴向位置上扭转角度与节点扭角的关系:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\sin[k_a(L-x)]}{\sin(k_a L)} & \frac{\sin(k_a x)}{\sin(k_a L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中  $\Phi(x, \omega)$  为扭转角度谱分量,  $k_a$  为波数,  $k_a = \omega/c_a$ ,  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  为节点扭角谱分量。

节点扭矩与扭角间关系式为

$$[T_1 \quad T_2]^T = S_a [\Phi_1 \quad \Phi_2]^T \quad (8)$$

$$S_a = \frac{k_a GJ}{\sin(k_a L)} \begin{bmatrix} \cos(k_a L) & -1 \\ -1 & \cos(k_a L) \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $T_1$  和  $T_2$  为节点扭矩谱分量,  $S_a(\omega)$  为轴的动力学刚度阵,  $J$  为截面极惯性矩。

### 2.3 铁木辛柯梁的横向振动

铁木辛柯梁的横向运动方程为

$$\kappa G \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \kappa GA \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right] = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (11)$$

式中  $\kappa, v, \theta, I$  和  $A$  分别为其剪切形状系数、横向位移、横向转角、惯性矩和横截面面积。

对式(10, 11)进行傅里叶变换,得出横向位移和转角的通解如下。

$$V = \sum_{j=1}^4 B_j e^{-ik_j x}, \quad \Theta = \sum_{j=1}^4 \eta_j B_j e^{-ik_j x} \quad (12, 13)$$

式中  $V(x, \omega)$  和  $\Theta(x, \omega)$  分别为横向位移和转角的谱分量。

对应横向波数和幅值特征系数如下。

$$k_1 = -k_2 = 1/\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\rho}{E} \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \omega^2 + \omega \sqrt{4 \frac{\rho A}{EI} + \frac{\rho^2}{E^2} \left( 1 - \frac{E}{\kappa G} \right)^2} \omega^2} \quad (14)$$

$$k_3 = -k_4 = 1/\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\rho}{E} \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \omega^2 - \omega \sqrt{4 \frac{\rho A}{EI} + \frac{\rho^2}{E^2} \left( 1 - \frac{E}{\kappa G} \right)^2} \omega^2} \quad (15)$$

$$\eta_j = -ir_j = -\frac{i}{k_j} \left( k_j^2 - \frac{\rho}{\kappa G} \omega^2 \right) \quad (j=1 \sim 4) \quad (16)$$

两端节点横向位移转角代入式(12, 13),得到梁的任意位置横向位移转角和节点关系为

$$[V \quad \Theta]^T = N [V_1 \quad \Theta_1 \quad V_2 \quad \Theta_2]^T \quad (17)$$

$$N = \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & e^{ik_1 x} & e^{-ik_3 x} & e^{ik_3 x} \\ -ir_1 e^{-ik_1 x} & ir_1 e^{ik_1 x} & -ir_3 e^{-ik_3 x} & ir_3 e^{ik_3 x} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ir_1 & ir_1 & -ir_3 & ir_3 \\ e^{-ik_1 L} & e^{ik_1 L} & e^{-ik_3 L} & e^{ik_3 L} \\ -ir_1 e^{-ik_1 L} & ir_1 e^{ik_1 L} & -ir_3 e^{-ik_3 L} & ir_3 e^{ik_3 L} \end{bmatrix}^{-1} \quad (18)$$

$N(x, \omega)$  为形函数,  $V_1, V_2$  和  $\Theta_1, \Theta_2$  为节点位移转角谱形式,考虑铁木辛柯梁力和位移关系,得到节点力和节点位移关系为

$$[Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2]^T = S_b [V_1 \quad \Theta_1 \quad V_2 \quad \Theta_2]^T \quad (19)$$

$$S_b = \begin{bmatrix} S_{b11} & S_{b12} & S_{b13} & S_{b14} \\ & S_{b22} & S_{b23} & S_{b24} \\ & & S_{b33} & S_{b34} \\ sym & & & S_{b44} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中  $Q_1$  和  $Q_2$  为节点剪切力谱形式,  $M_1$  和  $M_2$  为节点弯矩谱形式,  $S_b(\omega)$  为铁木辛柯梁动力学刚度阵。

### 2.4 空间刚架结构的振动

在杆、轴和铁木辛柯梁动力学刚度阵基础上,利用有限元刚度阵组合法,得到杆件动力学刚度阵,再通过相应转换矩阵,得到空间刚架结构动力学刚度矩阵  $S$  满足:

$$SU = F \quad (21)$$

式(21)即为空间刚架结构谱形式的方程,其中  $S, U$  和  $F$  分别为空间刚架动力学刚度阵、节点位移阵和节点力阵,由此可进一步得到刚架的固有频率、谐响应和瞬态响应等。

### 3 空间刚架振动算例

图2为算例空间刚架结构,左端为固定端,右端为自由端。密度  $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ ,弹性模量  $E=70 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu=0.33$ ,横竖杆长  $L=0.4 \text{ m}$ ,圆截面内径大小  $d=12 \text{ mm}$ ,外径大小  $D=20 \text{ mm}$ ,截面形状系数  $\kappa=10/9$ ,损耗因子为  $0.001$ 。在点19处作用大小  $F=10 \text{ kN}$ ,方向为Y轴负向的矩形单脉冲,作用时间  $\tau=1 \text{ ms}$ ,分析点9的三个方向位移情况。

考虑损耗因子对结构动力学特性的影响,只需将前述公式的模量用复数形式表示。空间刚架 ANSYS有限元法分别划分为 144, 288 和 576 个

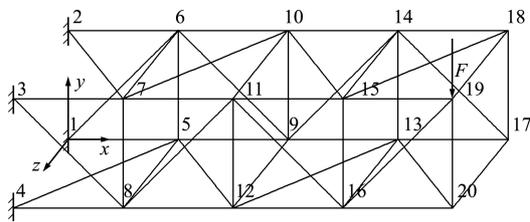


图2 空间刚架结构算例  
Fig. 2 Example of space frame structure

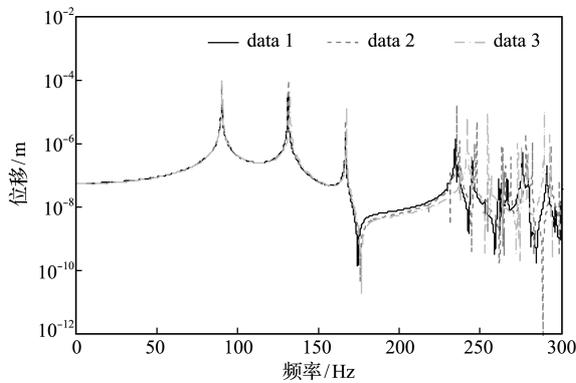


图3 X向位移谱响应  
Fig. 3 X direction displacement harmonic response

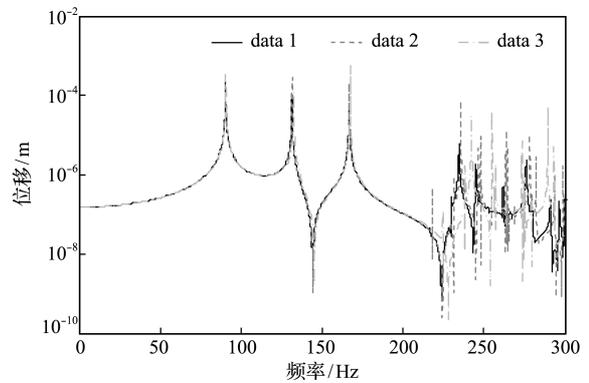


图4 Y向位移谱响应  
Fig. 4 Y direction displacement harmonic response

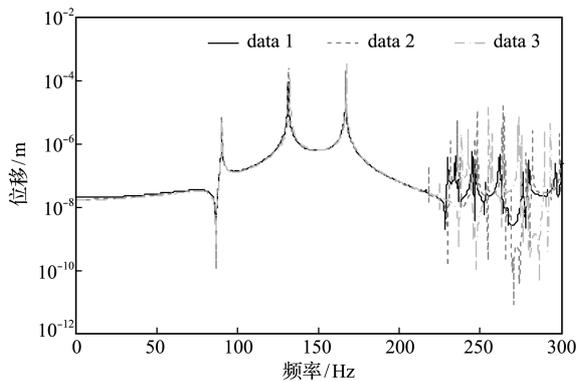


图5 Z向位移谱响应  
Fig. 5 Z direction displacement harmonic response

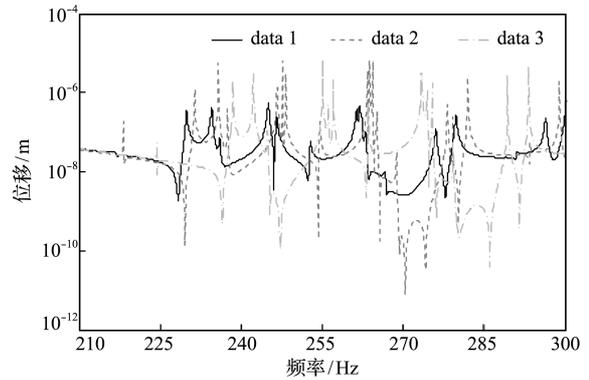


图6 Z向位移谱响应(210 Hz~300 Hz)  
Fig. 6 Z direction displacement harmonic response (210 Hz~300 Hz)

单元,谱元法仅划分为 48 个单元。

表1为两种方法算得的固有频率前10阶比较,可以看出有限元法单元划分的越多,各阶固有频率越接近谱元法计算值,这说明谱元法在较小单元数的情况下,计算的固有频率更为准确,该方法可有效而精确地分析动力学特性。

图3~图5为单位阶跃力时,点9沿X,Y和Z三个方向的位移谱响应,力的方向和作用点保持不

表1 有限元法与谱元法固有频率(Hz)比较  
Tab. 1 Comparison of the natural frequencies (Hz) computed by FEM and SEM

阶数	有限元			谱元法 48个单元
	144个单元	288个单元	576个单元	
1	90.90	90.46	90.34	90.32
2	136.84	132.45	131.38	131.32
3	169.02	167.29	166.78	166.71
4	251.15	224.43	218.21	216.78
5	266.79	238.48	231.36	229.93
6	269.18	242.27	235.79	234.54
7	276.26	244.95	237.48	236.10
8	291.74	255.10	246.65	245.05
9	292.98	256.17	247.70	245.98
10	296.95	257.11	248.31	246.69

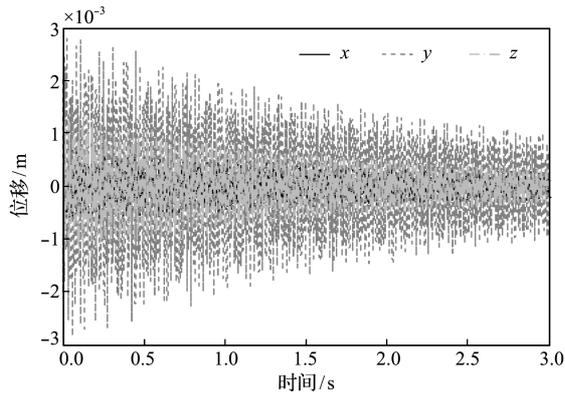


图7 位移瞬态响应(0~3 s)  
Fig.7 Displacement transient response (0~3 s)

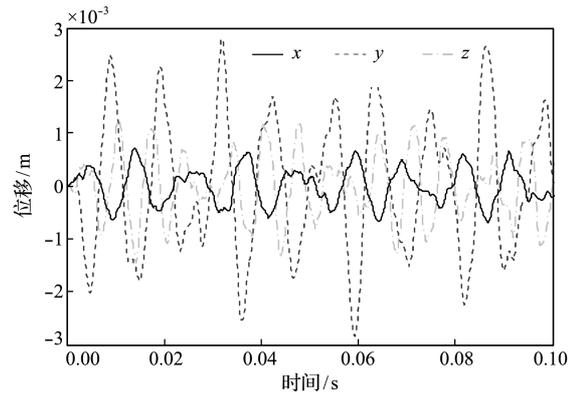


图8 点9的位移瞬态响应(0~0.1 s)  
Fig.8 Displacement transient response (0~0.1 s)

变,图6为图5高频段的放大。data1~data3分别为谱元法48个单元及有限元法576个单元和288个单元三种情况下的计算结果。

有限元法位移谐响应随着单元数目的增加,收敛于谱元法的谐响应曲线。谱元法分析结果更为准确,在中高频段误差更小。相同频率分辨率和截止频率下,谱元法用时4 min 12 s,ANSYS有限元法(288个单元)用时1 h 25 min,谱元法用时较短。

图7和图8为矩形脉冲力作用时,点9位移时域响应曲线,在阻尼作用下位移幅值衰减,可见谱元法在有效计算频域响应的同时,也能得到结构的时域响应。

## 4 结论

本文依次推导了杆、轴、铁木辛柯梁和空间刚架的动力学刚度阵,并研究了刚架的固有频率、谐响应和瞬态响应等动力学特性,得到以下结论。

(1) 谱元法可有效分析空间刚架结构的动力学特性,尤其适合直接解决相关频域问题,特别是中高频振动。

(2) 比较有限元方法,谱元法所需单元和自由度较少,复杂问题得以简化,计算精确度和效率更高,可很好地节省计算成本。

## 参考文献(References):

[1] Doyle J F. *Wave Propagation in Structures*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.  
[2] Lee U. *Spectral Element Method in Structural Dynamics* [M]. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009.  
[3] Banerjee J R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach [J]. *Computers & Structures*, 1997, **63**(1): 101-103.

[4] Eisenberger M, Abramovich H, Shulepov O. Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory [J]. *Composite Structures*, 1995, **31**(4): 265-271.  
[5] Lee U, Kim J. Spectral element modeling for the beams treated with active constraining layer damping [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(32): 5679-5702.  
[6] Charkraborty A, Gopalakrishnan S. A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(10): 2421-2448.  
[7] Banerjee J, Williams F W. Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **21**(12): 2289-2302.  
[8] Hong M, Park I, Lee U. Dynamics and waves characteristics of the FGM axial bars by using spectral element method [J]. *Composite Structures*, 2014, **107**: 585-593.  
[9] Wang G, Unal A. Free vibration of stepped thickness rectangular plates using spectral finite element method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(18): 4324-4338.  
[10] Wu Z J, Li F M, Wang Y Z. Vibration band gap behaviors of sandwich panels with corrugated cores [J]. *Computers & Structures*, 2013, **129**: 30-39.  
[11] Li J, Hua H. Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, **43**(15): 1155-1168.  
[12] Lee U. Equivalent continuum representation of lattice beams: spectral element approach [J]. *Engineering Structures*, 1998, **20**(7): 587-592.  
[13] 李凤明,吴志静,刘荣强. 铰接桁架结构动力学问题研

- 究[J]. 宇航学报, 2012, **33**(5): 556-561. (LI Feng-ming, WU Zhi-jing, LIU Rong-qiang. Study on the dynamics problems of truss structure with joints[J]. *Journal of Astronautics*, 2012, **33**(5): 556-561. (in Chinese))
- [14] 张俊兵, 朱宏平, 闾东东, 等. 基于波谱单元法的结构动力响应分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2010, **38**(7): 62-65. (ZHANG Jun-bing, ZHU Hong-ping, GE Dong-dong, et al. Dynamic analysis of structures by using spectral element method [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2010, **38**(7): 62-65. (in Chinese))
- [15] 张俊兵, 朱宏平, 王丹生. 移动荷载作用下桥梁动态响应的波谱单元法[J]. 土木工程与管理学报, 2011, **28**(3): 206-211. (ZHANG Jun-bing, ZHU Hong-ping, WANG Dan-sheng. Spectral element method for bridges subjected to moving loads [J]. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2011, **28**(3): 206-211. (in Chinese))

## Dynamics characteristic analysis of space frame structure based on spectral element method

E Lin-zhong-yang<sup>\*</sup>, DU Qiang, LI Shang-ming  
(Institute of Systems Engineering, CAEP, Mianyang 621900, China)

**Abstract:** Treating space frame structure as research object, spectral element method (SEM) was applied to analyze dynamics characteristics. We could derive dynamic stiffness matrices of bar, shift and Timoshenko-beam. And then, dynamic stiffness matrix of space frame structure and theory formula of frequency domain response were established. The application field of SEM was expanded. Based on programming and computing, natural frequencies of space frame and harmonic response of any point were calculated and compared with the result of FEM. Transient responses were further calculated with load. In the frame structure dynamics analysis, research shows SEM is more accurate and effective than FEM, and is better suited to solve the problem of high-frequency vibrations.

**Key words:** spectral element method; space frame structure; natural frequencies; harmonic response; transient response