第33卷第5期 计算力学学报 Vol. 33, No. 5
2016年10月 Chinese Journal of Computational Mechanics October 2016

DOI:10.7511/jslx201605022

数值岩石试样破裂过程多重分形特征

杨宇江*[1], 李元辉[2]

(1.辽宁科技大学 矿业工程学院,鞍山 114051;2.东北大学 资源与土木工程学院,沈阳 110004)

摘 要:采用数值分析的方法和FLAC^{3D}软件,建立服从应变软化关系的非均质岩石试样模型。引入多重分形理论,通过盒计数法计算了单轴加载过程中峰前某一阶段单元体积应变的多重分形谱 $f(\alpha)$。分析了 $f(\alpha)-\alpha$ 曲线特征参数 Δf 和 $\Delta\alpha$ 随加载过程的阶段特征,不同均匀程度的岩石试样在临近峰值强度前 $\Delta\alpha$ 和 $f(\alpha)_{max}$ 的变化规律。研究结果表明,采用多重分形理论对单元体积应变的空间分布特征进行描述,可以在较大的尺度内满足标度不变性。通过不同的参量进行概率计算得出的 $f(\alpha)$ 略有不同,但动态变化规律相近,$f(\alpha)$ 曲线呈左钩形状,随着载荷的增加 Δf 变大,而 $\Delta\alpha$ 变小。当不是所有的盒子内都存在可测度的参量时,$f(\alpha)_{max}$ 随载荷的增加而增长。对于均匀程度不同的试样,峰前 $f(\alpha)_{max}$ 与 $\Delta\alpha$ 随均匀性的增加而减小,但在均匀性较高以后,逼近于某一常数。

关键词:非均匀性;数值模拟;多重分形谱;标度不变性

中图分类号:TP273;O242.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2016)05-0796-06

1 引 言

分形几何是由Mandelbrot发展起来的一门新的数学分支,通过自相似性和分形维数来描述自然界不规则以及杂乱无章的现象和行为[1]。分形理论在地球物理学中的一个应用方向是研究岩石的破裂过程,已有的研究表明,岩石材料的宏观破裂是内部微裂隙从萌生到贯通的渐进过程,具有不确定性和不规则性,但从分形的角度上观察,不同类型(尺寸)的岩石材料,其结构演化的几何及物理量特征,均表现出较好的统计自相似性[2,3]。

岩石类材料的破裂过程虽然可以用简单的分形维数进行描述,但这只是研究对象整体上标度关系的定量表征,而不能完全揭示产生这一复杂物理过程的全部内涵。一般认为,在大多数的物理现象中,系统的行为主要取决于某个物理参量(主要是标量)的空间分布。如果考虑分形体的物理本质,一个内部物理量很不均匀的分形体通过多重分形更适于描述。目前,许多学者通过试验和观测手段研究岩石力学中的多重分形问题已取得了明显的进展。文献[4]对岩体结构面的不同剖面测量统计结果进行多重分形分析;文献[5]提出了投影覆盖法,结合无接触激光表面测量技术直接测定出断裂表面分维值,建立了表面粗糙性投影覆盖的概率函数,分析了节理(断裂)表面的多重分形性质;文献[6,7]试验研究了煤样在单轴压缩下的表面电位变化规律,应用多重分形统计理论分析表面电位信号,计算了多重分形谱,并分析多重分形谱特征参数随加载过程的变化规律;文献[8]以分形理论为基础,通过引入分形维数来刻画煤层孔隙结构的复杂性。

在数值分析方面,通常是建立在岩石单元物理参数随机分布条件下,探讨岩石损伤破裂分形维数随着均质度、力学参数与外载荷之间的演变关系,多以简单分形维数的测定或平均近似分析处理为主[2,3]。由于岩石内应力状态、强度特征不均匀和破坏的渐进性,很多有价值的微观信息未能由简单分形所揭示。与简单分形相比,多重分形谱的测量和分析处理要复杂得多,但它着眼于多重几何尺度下考察物理量的奇异和差别的概率分布,弥补了简单分形分析中的诸多缺陷,是进一步深入研究分形物质性质的重要手段[9]。目前,国内关于岩石力学数值分析的多重分形研究并不多见,故本文在以往研究的基础上,采用FLAC^{3D}分析非均质岩石数值试样在单轴加载条件下的破裂过程,尝试引入多重分形的方法定量研究岩石试样加载过程中峰前某一阶段特征参数空间分布特征,以期为客观地揭示岩石破裂这一复杂的非线性过程中的空间变异状

收稿日期:2015-04-05;**修改稿收到日期**:2015-09-18.
基金项目:国家自然科学基金(51274055,51204030)资助项目.
作者简介:杨宇江*(1974-),男,博士,讲师(E-mail:yyj_yangyujiang@163.com).

况提供一定的参考。

2　单轴加载数值试样

多重分形着重研究物理量或者其他量在几何支撑上的分布，样本空间需要满足单元参数样本非均匀性分布和不同性质单元的空间随机分布，因而本文采用 Weibull 分布函数来进行岩石试样单元的弹性模量 E 和内聚力 c 的相关联赋值，具体实现方法详见文献[3,10-12]。立方体计算模型的几何尺寸如图 1 所示，其中试样部分由边长 1 mm 的立方体单元构成。试样单元 E 和 c 的数学期望分别为 35.0 GPa 和 10.0 MPa，其他参数为内摩擦角 $\varphi=48.0°$，抗拉强度 $\sigma_t=3.5$ MPa，泊松比 $\mu=0.22$。接触面力学参数为法向刚度 $K_n=30.0$ GPa，切向刚度 $K_s=18.0$ GPa，$c=2.0$ MPa，$\varphi=30.0°$，$\sigma_t=1.0$ MPa。模型端部为均质线弹性体，E 为试样单元 E 的数学期望的 1.5 倍，μ 相同。

试样单元破坏后先是经历线性应变软化行为，软化关系为塑性应变增至 0.02 后，φ 降至初始值的 20%。此后，单元体表现为理想塑性行为，进入残余阶段。加载过程中，当试样单元破坏达到一定程度后，单元 φ 的样本空间将持续变化，表现为期望降低而方差增加。

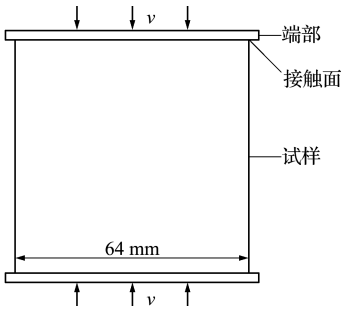

图 1　数值计算模型

Fig. 1　Calculation model

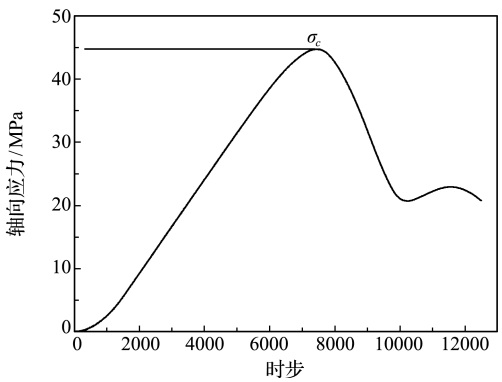

图 2　单轴加载应力-时步曲线

Fig. 2　Stress-steps curve of uniaxial compression test

加载方式采用轴向速度 v 控制，v 同时施加于模型两侧的端面上。为了避免施加常速度在加载初期对试样产生冲击，v 在 1500 步内由 0 m/时步线性增至 3.0×10^{-7} m/时步，此后保持该速度加载至试样完全破坏。图 2 为 Weibull 分布函数不均匀系数 $m=2.5$ 时得出的应力-时步曲线，试样的峰值载荷 σ_c 约为 45.0 MPa。

3　非均匀体的多重分形谱计算

从物理学角度看，多重分形是定义在分形结构上由有限种具有大量不同奇异指数的概率子集构成的非均匀分布的奇异集合。一般是通过盒计数法求出物理量的概率分布，然后借助统计物理原理进行多重分形谱分析[13,14]。

就按一定的概率存在的多重分形体而言，对各盒子(用 i 和 j 编号)内不均匀分布的物理量用概率分布 $P_{i,j}(\varepsilon)$ 进行描述，对于这个概率分布集，可以区分为以 α 为参数的子集

$$p_{i,j}(\varepsilon)\sim\varepsilon^{\alpha} \tag{1}$$

式中 ε 为测量尺寸(取 $\varepsilon\leqslant1$)，α 一般称为奇异指数。α 反映了分形体各个 ε 下，物理量分布概率随 ε 变化的各个子集的性质，α 愈大，子集的概率愈小。

若把分形体上以 α 标记的子集中具有相同概率的单元数目记为 $N_\alpha(\varepsilon)$，一般 $N_\alpha(\varepsilon)$ 随 ε 的减小而增大，可以有

$$N_\alpha(\varepsilon)\propto\varepsilon^{-f(\alpha)} \tag{2}$$

式中 $f(\alpha)(>0)$ 为 α 子集中单元数随 ε 下降而增大的速度，即 α 子集的分形维数。可以采用统计物理中常用的矩表示法求 $f(\alpha)$，定义配分函数 $\chi_q(\varepsilon)$ 可以得到

$$\chi_q(\varepsilon)\equiv\sum p_i(\varepsilon)^q\propto\varepsilon^{\tau}(q) \tag{3}$$

$$\tau(q)=\ln\chi_q(\varepsilon)/\ln\varepsilon \tag{4}$$

式中 $q\in(-\infty,+\infty)$ 为统计矩的阶，称为权重因子，用来表征多重分形的不均匀程度。当 $q>0$ 时，主要反映较大概率子集的分形特征；当 $q<0$ 时，则反应较小概率子集的分形特征。q 在理论上取的越大越好，但受计算能力的限制，一般取在某一实数范围之内。对于给定的阶 q，$\tau(q)$ 为质量指数函数，是分形特征行为的特征函数。

从 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 的斜率中得到 $\tau(q)$ 曲线。相应地，广义分形维数 D_q 被定义为

$$D_q=\tau(q)/(q-1) \tag{5}$$

作 Legendre 变换可得

$$\alpha = \mathrm{d}[\tau(q)]/\mathrm{d}q \tag{6}$$

$$f(a) = \alpha q - \tau(q) \tag{7}$$

对于多重分形来说,质量指数 $\tau(q)$ 和多重分形广义维数 $D(q)$ 都是从整体上来描述多重分形的特征,而奇异性指数 α 和多重分形谱函数 $f(\alpha)$ 则能够表述多重分形的局部特征。多重分形谱谱宽 $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ 的大小反映了整个分形结构上物理量的概率测度分布的非均匀程度。

采用数值方法分析岩石破裂时,选取适合的标量进行 $P_{i,j}(\varepsilon)$ 计算尤为重要。严格的说,在整个加载过程的每一阶段,试样中参量的空间分布状态均不一致,在本文中,忽略试样加载初期的线弹性阶段,重点针对试样加载过程中 σ_c 前的某一时步进行分析。考虑到数值计算中易于获取的数据,就单元的体积应变进行 $f(\alpha)$ 计算。

3.1 基于单元体积应变的多重分形计算

用盒计数法进行多重分形谱的计算,将数值计算模型划分为若干个尺寸为 l^3 的立方体小盒子,令 $\varepsilon = l/L$,分别取盒子的边长 l 为 2 倍,4 倍,8 倍,16 倍,32 倍和 64 倍的单元网格边长,$L=64$,则 $\varepsilon < 1$。用以上边长的盒子覆盖试样单元数据集,单元以质心落入盒子内为准,最小盒子内的单元实际为 8 个,根据式(8)计算每个盒子的概率,

$$p_{i,j}(\varepsilon) = \theta_{i,j} \Big/ \sum \theta_{i,j} \tag{8}$$

式中 $\theta_{i,j}$ 表示第 i 和第 j 个盒子内单元体积应变的累计数,$\theta_{i,j} > 0$ 即

$$\theta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{V}'_k - \mathrm{V}_k)/\mathrm{V}_k \tag{9}$$

式中 n 为第 $[i,j]$ 个盒子内包含的单元数,$n \in [2^3, 2^{18}]$,V' 为变化后单元的体积,$\mathrm{V} = 1\ \mathrm{mm}^3$ 为单元的初始体积。通过 ε 的取值调整,可得尺度不同的盒子覆盖研究数据集时的概率分布,然后通过式(3)可得不同尺度的盒子覆盖数据集时的统计矩函数值。

在选取阶 q 时,$|q|_{\max}$ 取决于分布概率,分布概率越窄,要求的 $|q|_{\max}$ 越大,本文给定 q 的取值区间为[−50,50],以 8 为步距,最后取 10,绘制对应试样加载至 95% σ_c 时的 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线如图 3 所示。$\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线的线性范围称为标度范围,理想的规则多重分形 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线应有严格的线性关系。从图 4 可以看出,$\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线族具有明显的线性关系,计算得出在 $q = \pm 50$ 时,$\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线的相关系数仍在 0.9998 以上,表现出很好的标度不变性。

由多重分形理论可知,$\alpha_{\max}$ 和 $\alpha_{\min}$ 分别是奇异指数的最大值和最小值,是分形集尺度属性的一个测度,$\alpha_{\max}$ 表示概率最小,分形概率测度最为分散的子集的性质;而 $\alpha_{\min}$ 则表示概率最大,分形概率测度最为集中的子集的属性。多重分形谱的谱宽 $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ 可以定量表征数据空间结构的不规则特征,越大表示分布越不均匀。多重分形谱参数 $\Delta f = f(\alpha_{\max}) - f(\alpha_{\min})$,反应了最小和最大概率子集的数目差距,当 $\Delta f < 0$ 时,表明大概率子集起主要作用,$f(\alpha)$ - α 曲线呈左钩形;当 $\Delta f > 0$ 时,表明小概率子集起主要作用,$f(\alpha)$ - α 曲线呈右钩形。

图 4 为多重分形谱 $f(\alpha)$ - α 曲线,可以看出,当载荷约为 55% σ_c ~75% σ_c 时,$f(\alpha)$ - α 曲线近似呈钟形或二次曲线形,略呈左钩状,Δf 值较小且这三条曲线间的差异不明显。此后,当载荷增至 80% σ_c 时,$\Delta f \approx -0.2897$;至 85% σ_c 时,$\Delta f \approx -0.3543$;而在 95% σ_c 时,$\Delta f \approx -0.525$。从上述计算中可以得出,加载过程中最大概率的子集始终起着主导作用,并随着载荷的增加而更为显著。从 $\Delta\alpha$ 变化规律上看,$\Delta\alpha$ 表现为随着载荷的增加而减少的趋势,55% σ_c 时 $\Delta\alpha = 0.49$,75% σ_c 时 $\Delta\alpha = 0.39$,下降了 0.1。而在 80% σ_c 时 $\Delta\alpha = 0.314$,

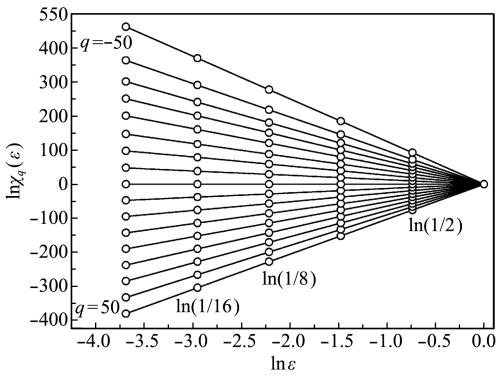

图 3 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 拟合曲线

Fig. 3 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ fitting curves

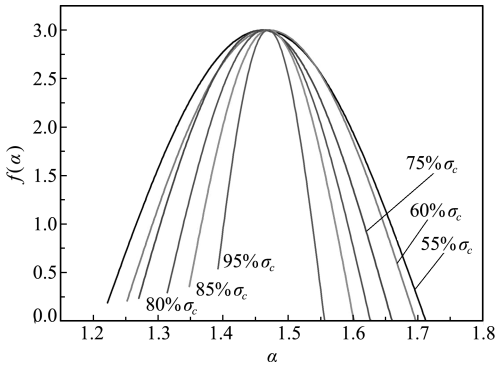

图 4 多重分形特征曲线

Fig. 4 Multi-fractal spectrum

95% σ_c 时 $\Delta\alpha=0.164$，下降了 0.15。$\Delta\alpha$ 表示数据结构空间的不规则程度，可见，随着载荷接近 σ_c，数据空间的分布越为均匀，并且呈加速发展的趋势。$\Delta\alpha$ 越小说明多重分形的特征越不明显，在 95% σ_c 时，已经很接近于简单分形。另外，从图 5 可以看出，$f(\alpha)$ - α 曲线的最大值 $f(\alpha)_{\max}=3$，这是由于每个盒子都存在不等于 0 的概率。

3.2　基于破坏单元的多重分形计算

上述 $P_{i,j}(\varepsilon)$ 所描述的样本空间为试样内所有单元，但应用 Mohr-Coulomb 模型或应变软化模型时，对单元破坏演化规律的分析是一项较为重要的内容。因而，本文尝试通过塑性状态发生改变的单元的体积应变的概率分布进行多重分形谱的计算，关于 FLAC 中单元塑性状态的描述请参见文献[12,15]。此时，将式(8)中 $\theta_{i,j}$ 改为表示第 i,j 个盒子内塑性状态发生改变的单元和新增的由弹性变为塑性的单元的体积应变的累计数，$\theta_{i,j}\geqslant 0$。

计算得出 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线在载荷增至一定程度时表现出很好的线性关系，80% σ_c 时的 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线如图 5 所示。可以看出，此时的 $\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 曲线在较大的尺度内具有很好的标度不变性，80% σ_c 以后的多重分形谱曲线如图 7 所示。从四条 $f(\alpha)$ - α 曲线中可以看出，$f(\alpha)$ - α 均表现为左钩形，表明 $\Delta f<0$ 时，大概率子集起主要作用。但 Δf 的变化规律却表现出不同的特征，当载荷条件为 80% σ_c 和 85% σ_c 时，$f(\alpha)$ - α 曲线的左钩特征不明显，85% σ_c 时的 Δf 略大，为 −0.24。此后，Δf 的变化较明显，至 95% σ_c 时增至 −0.527。$\Delta\alpha$ 的变化规律与图 4 类似，表现为随载荷接近 σ_c 而减小，由 80% σ_c 的 0.408 减至 95% σ_c 时的 0.171。由于试样破坏的渐近性，不符合 $\theta_{i,j}$ 计算条件的单元存在导致并非所有的盒子都满足 $P_{i,j}(\varepsilon)\neq 0$，在图 6 中表现为 $f(\alpha)_{\max}<3$。另外，计算得出 80% σ_c ～95% σ_c 的 $f(\alpha)_{\max}$ 依次为2.32，2.48，2.58和 2.74，表现为随载荷而增长的规律。

结合 3.1 的计算可以看出，加载过程中 $f(\alpha)$ - α 曲线均表现出左钩状，并随着载荷水平接近 σ_c 而 Δf 表现的更为明显。左钩形表明大概率子集起主要作用，即模型中体积应变较大和应变能较高的单元影响较为显著，而载荷水平越高，这部分单元的影响越大。从 $\Delta\alpha$ 的变化规律上看，载荷水平越接近 σ_c，$\Delta\alpha$ 越小，即分形谱越窄，表明模型中的参量均匀程度提高，多重分形特征随载荷的增加而逐渐变得不明显，而趋于向简单分形的方向发展。由于模型为三维的计算条件，$f(\alpha)_{\max}\leqslant 3.0$。当并非所有的盒子内都存在 $P_{i,j}(\varepsilon)$ 不等于 0 的概率时，$f(\alpha)_{\max}$ 呈随着载荷水平的提高而逐渐增长的趋势，逐步逼近 3.0。

4　$f(\alpha)_{\max}$，$\Delta\alpha$ 与 m 之间的关系

为了更好地分析试样的非均匀特征与 $f(\alpha)$ - α 曲线之间的关系，本文分别采用 m=1.5，2.0，2.5，…，6.0 十种不同均质度的模型，其物理力学参数的选取及加载条件同上文 m=2.5 的模型。依据第 3.2 节的计算方法，取 95% σ_c 时，$f(\alpha)_{\max}$ 依次为 2.78，2.766，2.74，2.68，2.6，2.52，2.431，2.39，2.38和 2.376，而 $\Delta\alpha$ 依次为 0.182，0.178，0.17，0.148，0.123，0.112，0.096，0.082，0.08 和 0.078。

对以上数据采用 Sigmoidal 类函数进行拟合，取 m 值为 x 坐标轴，$\Delta\alpha$ 和 $f(\alpha)_{\max}$ 分别为 y_1 和 y_2。由于 m 值为线性关系，考虑选用 Boltzmann 拟合函数，其表达式为

$$y=(A_1-A_2)/[1+e^{(x-x_0)/dx}]+A_2 \quad (10)$$

式中 A_1 和 A_2 为值域，$y\in(A_1,A_2)$；x_0 为定义域的中点。通过 Boltzmann 函数可以得到很好的拟合效果，两条拟合曲线校正后的决定系数(Adj.

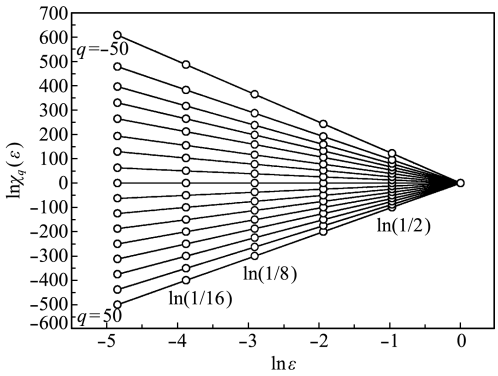

图 5　$\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ 拟合曲线

Fig. 5　$\ln\chi_q(\varepsilon)$ -$\ln\varepsilon$ fitting curves

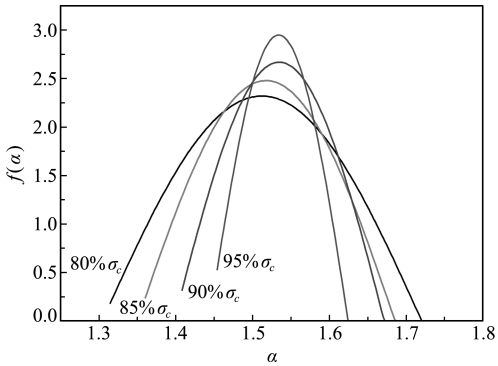

图 6　多重分形特征曲线

Fig. 6　Multi-fractal spectrum

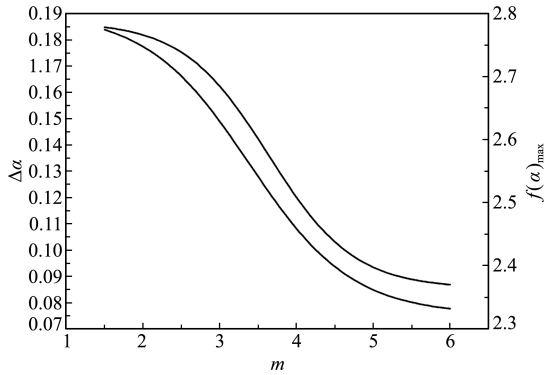

图 7 $f(\alpha)_{\max}$ 和 $\Delta\alpha$ 与均质度 m 的拟合关系曲线

Fig. 7 Fitting curve of $f(\alpha)_{\max}$, $\Delta\alpha$ and m

R-Square)均在 0.99 以上，拟合得出的 $\Delta\alpha$-m 和 $f(\alpha)_{\max}$-m 曲线如图 7 所示。根据拟合的结果，理论上，$m\in(-\infty,+\infty)$，$\Delta\alpha\in(0.0755,0.191)$，$f(\alpha)_{\max}\in(2.364,2.787)$。当 $m=1.5$ 时，$\Delta\alpha=0.184$，$d(\Delta\alpha)/d(m)=-0.0094$，可以认为在 $m<1.5$ 时 $\Delta\alpha$ 为一条近似水平的直线，$f(\alpha)_{\max}$ 与之类似。当 $m\in(1.5,5.0)$时，$\Delta\alpha$ 和 $f(\alpha)_{\max}$ 均表现为随 m 的增加而持续下降，其中 $\Delta\alpha$ 曲线的值域为(0.0755,0.19)，在拐点处的导数仅为−0.043，总体上的变化非常平缓；$f(\alpha)_{\max}$ 的值域为(2.36,2.79)，曲线在拐点处的导数为−0.18，要陡于 $\Delta\alpha$ 曲线。在 $m>5.0$ 后，两条曲线趋于平缓，$d(f(\alpha)_{\max})/d(m)$ 从 0.055 至 0.011，而 $d(\Delta\alpha)/d(m)$ 仅从−0.013 至−0.003。

可见，在接近峰值强度前当 $m\leqslant1.5$ 时，模型非常不均匀，$\Delta\alpha$ 和 $f(\alpha)_{\max}$ 值较高，但变化不大；而 $m\in(1.5,5.0)$ 时，模型的均匀程度越高，多重分形谱越窄，越接近于简单分形。$f(\alpha)_{\max}$ 随同样均匀程度的增加而减小，这点与文献[2,16]通过数值和试验得出的简单分形维数的变化规律较一致，但 $f(\alpha)_{\max}$ 对 m 值的敏感程度高于 $\Delta\alpha$。在 $m>5.0$ 后，模型实际上趋于均质，各项指标不再有明显变化。

5 结 论

(1) 非均质岩石试样数值模型，采用合理的概率算法进行计算，通过对研究区域不同尺度的网格划分，可以满足在较大尺度内的标度不变性，得出试样内多重分形奇异谱，定量表征了试样破裂过程中某些特征参量的空间变异性，在一定程度上为岩石破裂不同阶段的定量化研究提供了一个新的思路。

(2) 岩石破裂实际上是一个自组织过程，破坏单元从无序分布到集中有序的分布。采用不同的 $P_{i,j}(\varepsilon)$ 进行描述 $f(\alpha)$-α 曲线略有不同，其多重分形参数的动态变化规律相近。随着载荷逐渐增至峰值强度，大概率子集起主要作用，$f(\alpha)$-α 曲线的左钩特点趋于明显；同时多重分形谱宽变窄，模型中参量的空间分布特点向简单分形的趋势发展。

(3) 采用并不是所有的盒子都存在 $P_{i,j}(\varepsilon)$ 不等于 0 的参量进行描述时，$f(\alpha)_{\max}$ 呈随载荷增长而持续增加的趋势。对于不同均匀性的模型，在试样破裂前，$f(\alpha)_{\max}$、谱宽与均质度 m 间近似成 Sigmoidal 函数关系，$f(\alpha)_{\max}$ 和谱宽随均匀程度的增加而减小，但 $f(\alpha)_{\max}$ 对均匀性的改变更为敏感。在均匀性达到一定程度后，$f(\alpha)_{\max}$ 和谱宽不再有明显变化。

单轴加载是岩石力学试验中最简单的一种，数值建模也需考虑加载条件，建模方式与本构关系等多方面的内容，这些均对多重分形的计算结果产生影响；同时，多重分形概率分布曲线及标度不变性的范围也与计算方法有关。因而 $f(\alpha)$-α 曲线动态变化的内在本质，岩石破裂自组织过程动态非线性变化的形成机制，数值计算方法等还有待进一步研究。

参考文献(References)：

[1] Mandelbrot B B. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension[J]. *Science*, 1967, **156**(3775): 636-638.

[2] 谢和平. 分形-岩石力学导论[M]. 北京：科学出版社，1996. (XIE He-ping. *Fractal-rock Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese))

[3] 梁正召，唐春安，唐世斌，等. 岩石损伤破坏过程中分形与逾渗演化特征[J]. 岩土工程学报，2007，**29**(9)：1386-1391. (LIANG Zheng-zhao, TANG Chun-an, TANG Shi-bin, et al. Characteristics of fractal and percolation of rocks subjected to uniaxial compression during their failure process[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, **29**(9): 1386-1391. (in Chinese))

[4] 王洪兴，王 冠，唐辉明，等. 贵阳鱼简河水库坝址区岩体结构面的多重分形[J]. 岩土力学，2006，**27**(7)：1166-1170. (WANG Hong-xing, WANG Guan, TANG Hui-ming, et al. Multifractal for structural planes in rock mass of dam site area of Yujianhe Reservoir, Guiyang[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2006, **27**(7): 1166-1170. (in Chinese))

[5] 谢和平，王金安. 岩石节理(断裂)表面的多重分形性质[J]. 力学学报，1998，**30**(3)：314-320. (XIE He-ping, WANG Jin-an. Multifractal behaviors of fracture surfaces in rocks[J]. *Chinese Journal of Theoretcal and Applied Mechanics*, 1998, **30**(3):

314-320.(in Chinese))

[6] 刘　杰，王恩元，李忠辉，等.煤样破裂表面电位多重分形特征[J].煤炭学报，2013，**38**(9)：1616-1620.(LIU Jie，WANG En-yuan，LI Zhong-hui，et al. Multi-fractal characteristics of surface potential of coal during the fracture[J]. *Tournal of China Coal Society*，2013，**38**(9)：1616-1620.(in Chinese))

[7] 胡少斌，王恩元，李忠辉，等.受载煤体电磁辐射动态非线性特征[J].中国矿业大学学报，2014，**43**(3)：380-387.(HU Shao-bin，WAND En-yuan，LI Zhong-hui，et al. Nonlinear dynamic characteristics of electromagnetic radiation during loading coal[J]. *Journal of China University of Mining&Technology*，2014，**43**(3)：380-387.(in Chinese))

[8] 张先敏，同登科.分形理论在煤层气非平衡吸附模型中的应用[J].计算力学学报，2008，**25**(3)：407-410.(ZHANG Xian-min，TONG Deng-ke. Application of fractal theory in nonequilibrium adsorption model of coalbed methane[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2008，**25**(3)：407-410(in Chinese))

[9] 孙　霞，吴自勤，黄　昀.分形原理及其应用[M].合肥：中国科学技术大学出版社，2003.(SUN Xia，WU Zi-qin，HUANG Yun. *Principle and Apply of Fractal*[M]. Hefei：University of Science and Technology of China Press，2003.(in Chinese))

[10] Wang X B. Shear deformation，failure and instability of rock specimen in uniaxial compression based on gradient dependent plasticity[J]. *Geotechnical Special Publication* ASCE，2006，**150**(5)：213-219.

[11] Wang S Y，Sloan S W，Huang M L，et al. Numerical study of failure mechanism of serial and parallel rock pillars[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*，2011，**44**(2)：179-198.

[12] Fang Z，Harrison J P. Application of a local degradation model to the analysis of brittle fracture of laboratory scale rock specimens under triaxial conditions[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*，2002，**39**(4)：459-476.

[13] Halsey T C，Jensen M H，Kadanoff L P，et al. Fractal measures and their singularities：the characterization of strange sets[J]. *Physcial Review* A，1986，**33**(2)：1141-1150.

[14] 孙　霞，傅竹西，吴自勤.薄膜生长的多重分形谱的计算[J].计算物理，2001，**18**(3)：247-252.(SUN Xia，FU Zhu-xi，WU Zi-qin. Multifractal calculation of thin film growth[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*，2001，**18**(3)：247-252.(in Chinese))

[15] Itasca Consulting Group Inc. *FLAC*^{3D}(*Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions*)(*Version* 3.0)[M]. Minneapolis：Itasca Consulting Group Inc，2005.

[16] 高　峰，谢和平，赵　鹏.岩石块度分布的分形性质及细观结构效应[J].岩石力学与工程学报，1994，**13**(3)：240-246.(GAO Feng，XIE He-ping，ZHAO Peng. Fractal properties of size-frequency distribution of rock fragments and the influence of meso-structure[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*，1994，**13**(3)：240-246.(in Chinese))

Multi-fractal spectra characteristics of numerical rock specimen during the fracture

YANG Yu-jiang*[1]，　LI Yuan-hui[2]

(1. School of Mining Engineering，University of Science and Technology Liaoning，Anshan，114051 China；
2. College of Resources and Civil Engineering，Northeastern University，Shenyang 110004，China)

Abstract：A heterogeneous strain softening rock specimen was established with the numerical code FLAC^{3D}. The multi-fractal spectrum $f(\alpha)$ of the elements volumetric strain at the pre-peak of rock specimen under uniaxial loading was obtained by using the box-counting method. The change rules of multi-fractal spectrum characteristic parameters，$\Delta\alpha$ and Δf，with the different stages of loading process were analyzed. The characteristics of the $f(\alpha)$ curve vertex $f(\alpha)_{max}$ and $\Delta\alpha$ with different heterogeneity of rock specimen near the peak strength was studied. The results show that the double logarithmic diagram would keep scale invariance in a wide range when the multi-fractal was used to describe the spatial structure of elements volumetric strain. The $f(\alpha)$ curves shape and variation are similar to different parameter probabilistic calculation method. The shape of the multi-fractal spectrum show left hook. The Δf increase with the loading process. At the same time，the $\Delta\alpha$ trend to decrease. If the possibility of null events exist in some of the boxes，the $f(\alpha)_{max}$ increase with the loading. There is an obviously decrease tendency of the $f(\alpha)_{max}$ and $\Delta\alpha$ with the decrease of the heterogeneity within limit at the pre-peak of rock specimen. However，they would be constants while the homogeneity increased to a certain extent.

Key words：heterogeneity；numerical simulation；multi-fractal spectrum；scale invariance