

连续系统的界带分析方法

姚 征^{*1}, 张洪武², 钟万勰²

(1. 大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院, 大连 116026;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘 要:基于分析结构力学提出的界带分析方法,将子结构间的分界面延拓为有一定宽度的分界带/分界域,从而可以用于分析计算结构的非局部效应。界带分析方法首先在离散结构的分析计算中取得了成功,从而验证了该套理论算法的准确性。离散结构按界带宽度(影响域范围)划分子结构,因而限制了子结构区段积分计算的最小步长;而连续系统则要求可以实现任意步长的积分运算。通过引入步进的计算方法,界带分析方法可以实现任意步长的积分计算,进而可以解决连续系统的积分问题。通过数值算例验证了连续系统的界带分析方法的准确性和可行性,也为进一步研究该套计算方法在分析动力学中的应用打下基础。

关键词:界带分析;子结构;辛方法;分析结构力学

中图分类号:O302 **文献标志码:**A doi:10.7511/jslx201306001

1 引 言

当构件细微到微米/纳米尺度后,材料的力学性能呈现很强的尺寸效应,此时经典的局部理论已经无法完全解释这些现象,因而基于各种计及尺度效应的非局部理论对微纳尺度下结构的静动态响应分析成为当前力学领域研究的热点之一^[1-4]。非局部理论的计算模型大都是通过扩展 Eringen^[1]提出的非局部弹性模型获得的,虽然在很多领域取得了成功的应用,但非局部模型及其求解方法上还需要进一步的完善,因而针对非局部弹性模型的构建和求解方法的创新性探索从未停止过。文献[5]引入了界带(Inter-belt)的概念,并成功地应用于碳纳米管的声子能带分析^[6],从而充分证实了界带是处理此类问题的有效手段,它归属于分析结构力学的范畴。

文献[7]指出分析结构力学与分析动力学是互相模拟的,所以“有限元自动保辛”。文献[8]通过运用参变量方法,验证了保辛积分也可保证能量的守恒。离散系统的界带分析方法能够准确地计算碳纳米管所有频段范围内的声子谱,正是采用保辛算法的结果。分析结构力学中存在需考虑非局部效

应的弹性连续系统,而分析动力学中的时滞问题要基于时间完成积分,这都属于连续系统的界带分析与积分计算问题。如何在连续系统中引入界带分析方法,如何划分界带,这正是本文要探讨的问题。

2 结构力学界带的积分分析

离散是数值求解的要求,即使是连续系统,也需要将其离散后数值求解。但连续系统的积分计算要求可以按不同误差需求选取任意长度的步长,而离散系统中界带分析的每个积分区段都要求大于界带的宽度(影响域范围)。为了将离散系统的界带分析方法引入到连续系统,不妨先从离散系统入手,研究两者间的关系。首先考虑沿长度不变的一维链系统,在动力学中对应着时不变系统。设长度方向有很长的等间距 η 质点链,每个质点与地面有弹簧 k_i 连接而刚度不变。相近质点相互间也有弹簧联系:其中紧相邻的质点间有刚度 k_1 的弹簧相连,2次相邻的质点间有刚度 k_2 的弹簧相连, n_i 次相邻的质点间有刚度 k_{n_i} 的弹簧相连,而大于 n_i 次相邻的质点间没有弹簧了。也就是说,界带的宽度是 $\eta \times n_i$ 。当 $n_i = 0$ 时就没有宽度,成为界面了。

结构力学适用两端边界条件。因为是界带,所以边界条件不单纯是给出一个点的位移值,而要求给出两端界带的全部位移值。如果最简单 $n_i = 1$,则每端要给出2个质点的位移。又如链段只有4个质点则两端全部是给定位移的边界条件,没有内部点了。 $n + 4$ 个质点的链段,其两端共4点是界带

收稿日期:2012-04-25;修改稿收到日期:2012-11-22.

基金项目:国家自然科学基金(11202040,11072042,10721062);
国家重点基础基金研究项目(2009CB918501);中央
高校基本科研业务专项(3132013066)资助项目。

作者简介:姚 征*(1978-),男,博士,讲师
(E-mail: yaozheng@dlmu.edu.cn).

的,而内部有 n 个点可以消元,是界带理论的子结构。界带理论时两端位移分别表达为 \mathbf{q}_a 和 \mathbf{q}_b , 各为 $n_i + 1$ 维的向量。子结构当然有其变形能 $U(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ 以及出口刚度阵。其形式与通常一样为^[5-7]

$$U(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}, \mathbf{K}^T = \mathbf{K} \quad (1)$$

子结构与外部的联系应还有对偶的力向量:

$$\mathbf{p}_a = -\partial U / \partial \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b = \partial U / \partial \mathbf{q}_b \quad (2)$$

这些与通常的一样^[5-7,10]。以上是结构力学势能的表达形式,还有传递辛矩阵的表达,特别适用于离散分析动力学体系。引入两端的界带状态向量:

$$\mathbf{v}_a = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_b = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix} \quad (3)$$

则有传递形式^[7,10]为

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{S} \mathbf{v}_a \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{11} = -\mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{K}_{11}, \mathbf{S}_{22} = -\mathbf{K}_{22} \mathbf{K}_{12}^{-1}$$

$$\mathbf{S}_{12} = -\mathbf{K}_{12}^{-1}, \mathbf{S}_{21} = \mathbf{K}_{12}^T - \mathbf{K}_{22} \mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{K}_{11} \quad (5)$$

读者可验证 $\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \mathbf{J}$ 成立。

传递形式方可与分析动力学的初值问题相衔接,也表明了分析结构力学的界带理论可以与分析动力学的时滞理论相衔接。传递方程(4)表明,每一次传递一定是一个界带到下一个界带。它们相互间没有共同点,但可以有若干中间点,如同子结构的内部点被消元了。因此,传递是跳跃式地前进,至少跳跃一个界带宽度。对于无穷长的链条寻求能带本征值,这一点限制是没有问题的。但对于转换到连续系统积分,该限制是不能满足的。因为设一个界带(积分)的宽度是 $\eta \times n_i$, 则积分希望能每次积分一个 η 步长,而不是跳跃前进一个时滞宽度 $\eta \times n_i$ 。

期望每次前进一步 η , 依然要先考察结构力学的子结构分析。传统的子结构分析不是界带,而是界面。两端界面的里面全部是内部点。只有界面是与外部联系的。因此将界面处的节点位移及节点力共同组成状态向量。子结构是有变形能的,变形能本来是所有节点位移的函数。但内部节点的位移已经用最小势能原理消元了。消元用的是平衡方程,从子结构来看,已经没有节点力了。只有界面的节点或者用刚度阵,或者用状态向量的传递。而界带理论已经不是界面了,界面是没有厚度的,而界带是有一定厚度 $\eta \times n_i$ 的。因此界带的传递状态是(3),从 $\mathbf{v}_a \rightarrow \mathbf{v}_b$ 。此概念要转移到连续系

统积分问题。现在希望每次积分一个 η 步长,就不能直接运用(3)的跳跃前进形式了。

基本概念一定要清楚。位移是确定性的,不会因分析时采取不同的子结构划分而变动;但对偶力则必然是在切开结构时才会呈现出来。不切开时,本来就处于平衡状态,没有外力。传统理论考虑切开的是界面。而在界带理论时,切开已经不是一个面了,而将是一个界带,有厚度的。对偶力也不再是一个力了,而是界带内全部节点皆有对偶力。即使是同一个点,在不同界带内,其对偶力也是不同的。例如即使同一个节点 2,既可以看成处于界带 1,2 内,也可以看成处于在界带 2,3 内,其对偶力在不同界带内也是不同的。

最简单是先假定 $n_i = 1$, 按结构力学的界带理论分析。期望每次前进一步 η 。设初始的 $n_i + 1$ 个点上存在初始条件:

$$\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0 \text{ 或 } q_i, p_i, i = 0, \dots, n_i \quad (6)$$

这个 \mathbf{p}_0 当然是对于界带 $i = 0, \dots, n_i$ 说的。

下一步要积分到界带 $i = 1, \dots, n_i, n_{i+1}$, 要求解 $q_j, p_j, j = 1, \dots, n_i, n_{i+1}$ 。按基本概念,其中 $q_j, j = 1, \dots, n_i$ 无非是继承了前面 \mathbf{q}_0 的部分,而要求解的是 $p_j, j = 1, \dots, n_i, n_{i+1}$ 以及 $q_{n_{i+1}}$ 。以前界带 $i = 0, \dots, n_i$ 的对偶力 p_0 已经不再出现,它不在当前的界带 $i = 1, \dots, n_i, n_{i+1}$ 内,处于平衡状态了。简单些,不妨认为 $n_i = 1$ 。知道了 $q_0, p_0; q_1, p_1$ 要寻求 q_2, p_2 。这就有 $i = 0, 1, 2$, 共 3 个节点了,以后还要继续逐个传递。要将下一步的初始状态 $q_1, q_2; p_1, p_2$ 计算出来。

$n_i = 1$ 时的结构力学界带问题,左界带位移是 $\mathbf{q}_a: q_0, q_1$, 而右界带位移是 $\mathbf{q}_b: q_2, q_3$; 具体说界带有 $n_i + 1$ 个节点。变形能可以用对称矩阵(按图 1(b)的结构):

$$U_0(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$U_0(q_0, q_1; q_2, q_3) =$$

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_+ & -k_1 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & k_+ + k_2 & -k_1 & -k_2 \\ -k_2 & -k_1 & 2k_+ & -k_1 \\ 0 & -k_2 & -k_1 & 2k_+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

$$\text{where } k_+ = k_c + k_1 + k_2 \quad (7)$$

其中变形能的下标 0 代表界带内部有 0 个节点位移。变换到传递辛矩阵,成为从 $\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a$ 传递到 $\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_b$ ^[10]。

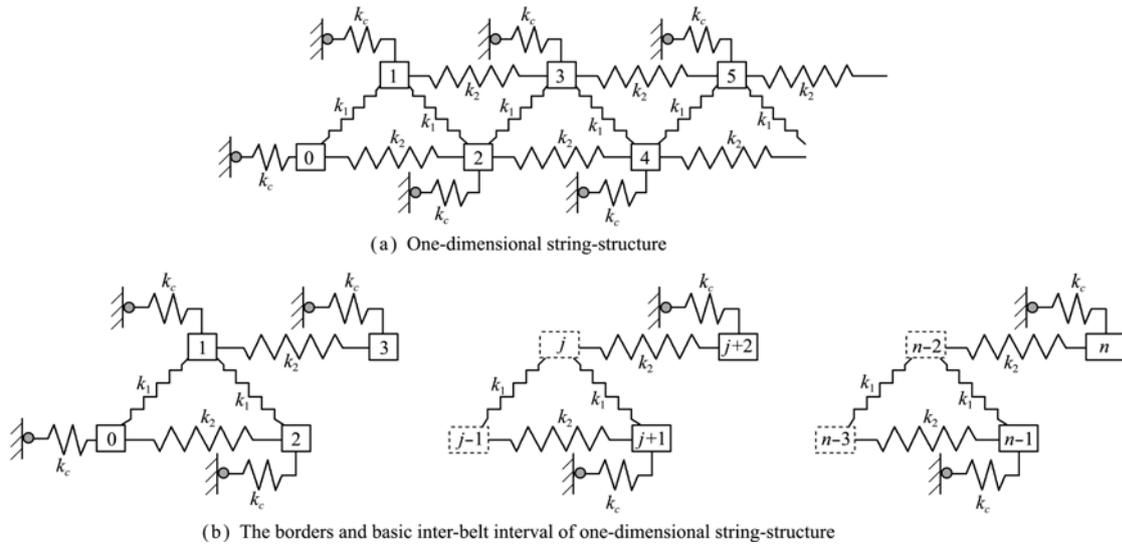


图1 一维链状界带结构

Fig. 1 One-dimensional Inter-belt string-structure

动力学也可用相同的形式表述。

此类形式的辛矩阵传递是跳跃式前进的,每次前进一个界带。两端位移 q_a, q_b 的对偶向量为

$$p_a = -\partial U_0 / \partial q_a, p_b = \partial U_0 / \partial q_b \quad (8)$$

从结构力学看,原来左界带位移是 $q_a: q_0, q_1$, 而右界带位移是 $q_b: q_2, q_3$ 。根据 q_a, p_a 计算 q_b, p_b 。跳跃式前进是辛矩阵乘法,已经讲得很多了。虽然是一维链简单问题,但其它问题的处理雷同。

数值算例 1 自由度 n 可以有,以下简单设定 $n=10$ 即 $i=0, 1, \dots, 9$ 。 $n_i=2$, 而 $k_1=2, k_2=1$ 。左端为给定力的边界条件,因 $n_i=2$ 故要给出 p_0, p_1 , 设 $p_0=2, p_1=1$ 。注意 $p_0+p_1=3$, 可用于检验平衡条件。而右端则固定, $q_8=q_9=0$ 。要求解各点的位移 q_0, \dots, q_7 , 以及各界带 #1:0,1; #2:2,3; #3:4,5; #4:6,7; #5:8,9 左端的力 $p_{\#j}, j=1\sim 5$ 。

这是结构静力学问题,线性体系,两端边界条件,如同悬臂梁。传统的求解方法自然以组装总刚度阵,然后确定外力向量,求解线性代数得到位移。但当结构趋于复杂时,整体刚度阵会快速膨胀,往往造成计算量的困难。

求解也可用传递矩阵方法执行,并利用传统求

解方法的结果进行校核。将结构划分为逐个的界带,如图 1(b)所示。

因为 $q_{\#1}=q_0, q_1$ 是未知数,所以是待求参数,与 $p_{\#1}; p_0=2, p_1=1$ 共同组成初始界带的状态向量。用传递方法,求出 $q_{\#5}: q_8=q_9=0$ 也是 $q_{\#1}=q_0, q_1$ 的函数,这样就有 2 个方程求解出 $q_{\#1}=q_0, q_1$ 。注意,传递矩阵的方法可能出现数值病态的,所以通常在结构分析中不采用。取 $k_c=0$, 跳跃式传递矩阵法的计算结果见表 1。

读者可以检验表 1 中 $p_{i-1}+p_i=-2-1=-3$, 平衡条件满足很好。左端的弹性本构关系:

$$p_2 = (q_2 - q_0)k_2 + (q_2 - q_1)k_1 = -2.000134766348842$$

$$p_3 = (q_3 - q_1)k_2 = -0.999865233651157$$

可以看出也满足得很好。与传统组装总刚度阵方法求解的结果对比发现,在双精度范围内传递矩阵法与组装总刚度阵求解法得到的结果完全一致。

同一个结构可以存在多种界带的划分方法,但位移是确定性的。中国哲学讲究阴一阳,当然是对偶。阴为地、阳为天。阴看得见、摸得着;而阳则变化多端。所以笼统地说:位移是阴,而力为阳。表 1

表 1 基本界带结构传递辛矩阵跳跃式计算结果

Tab. 1 Numerical results obtained by symplectic transfer matrix of the inter-belt structure

	# 1(i=1)	# 2(i=3)	# 3(i=5)	# 4(i=7)	# 5(i=9)
q_{i-1}	4.10565681	3.10562312	2.10511775	1.09807621	0
q_i	3.60567366	2.60580842	1.60769516	0.63397460	0
p_{i-1}	-2	-2.00013477	-2.00188673	-2.02627944	-2.36602540
p_i	-1	-0.99986523	-0.99811327	-0.97372056	-0.63397459

的力看来奇怪,因为界带的划分不同。

动力学积分是初值问题,本来就需要传递求解。但不可单纯地跳跃式前进,而需要逐步积分;连续系统的积分计算同样需要逐步积分。所以结构力学还要进一步逐步积分。

3 逐步前进的计算方法

以上是按界带跳跃式前进积分的。考虑连续系统的积分问题,要求只积分一个 η 。下一次的界带就成为 $\mathbf{q}'_a = \{q_1, q_2, \dots, q_{n_i}\}^T$, 而 $\mathbf{q}'_b = \{q_{n_i+1}, q_{n_i+2}, \dots, q_{2n_i}\}^T$, 而 q_0 成为应当出局的节点,即消去。问题成为:根据 $\mathbf{q}_a = \{q_0, q_1, \dots, q_{n_i-1}\}^T$, $\mathbf{p}_a = \{p_0, p_1, \dots, p_{n_i-1}\}^T$, 计算 $\mathbf{q}'_a = \{q_1, q_2, \dots, q_{n_i}\}^T$ 与 $\mathbf{p}'_a = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_{n_i}\}^T$ 。注意 p'_i 与 p_i 是不同的,但现在要传递逐步消元,只用前面的 $\mathbf{R}: (2n_i + 1) \times (2n_i + 1)$ 进行计算。将矩阵 \mathbf{R} 分解为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} d_0 & \mathbf{r}_{a0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_{a0}^T & \mathbf{R}_{aa} & \mathbf{R}_{ab} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{ba} & \mathbf{R}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p}'_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix}^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n_i \\ n_i \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{ab}: \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\Pi_+ = (p_0 q_0 + \mathbf{p}'_a^T \mathbf{q}'_a + U_1)$$

$$\mathbf{r}_{a0}: 1 \times n_i, \mathbf{R}_{aa}: n_i \times n_i, \mathbf{R}_{bb}: n_i \times n_i$$

将 Π_+ 乘出来。对于 q_0 取最小得到

$$q_0 = -(\mathbf{r}_{a0}/d_0) \mathbf{q}'_a - p_0/d_0 \quad (10)$$

代入 Π_+ 得到

$$\Pi' = [\mathbf{p}'_a^T \mathbf{q}'_a + U'_1(\mathbf{q}'_a, \mathbf{q}'_b)]$$

$$U'_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix}^T \mathbf{R}' \begin{bmatrix} \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix}, \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{aa} & \mathbf{R}_{ab} \\ \mathbf{R}_{ba} & \mathbf{R}_{bb} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{R}'_{aa} = [\mathbf{R}_{aa} - \mathbf{r}_{a0}^T d_0^{-1} \mathbf{r}_{a0}] =$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{r}_{a0}/d_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_0 & \mathbf{r}_{a0} \\ \mathbf{r}_{a0}^T & \mathbf{R}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_{a0}/d_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_{ab} = \mathbf{R}_{ab}, \mathbf{R}'_{bb} = \mathbf{R}_{bb} \quad (12)$$

$$\mathbf{p}'_a = \mathbf{p}'_{a0} - \mathbf{r}_{a0}^T \cdot p_0/d_0 \quad (13)$$

其中,重要的是子矩阵 \mathbf{R}'_{ab} 依然具有同样形式,因此消元可递归进行。通过以上计算,结构力学的界带就前进了一步,所谓步进,得到了 $U'(\mathbf{q}'_a, \mathbf{q}'_b)$ 。从

$U'(\mathbf{q}'_a, \mathbf{q}'_b)$ 再表达为传递辛矩阵的形式,就是常规了。

因此,步进计算是按下面步骤进行的:

(1) 组成 $\mathbf{R}: (2n_i + 1) \times (2n_i + 1)$, 并按式(9)分解成 $\mathbf{R}_{aa}, \mathbf{R}_{ab}, \mathbf{R}_{bb}; \mathbf{r}_{a0}, d_0; p_0, \mathbf{p}'_{a0}$; 其中,向量 \mathbf{p}'_{a0} 最后的元素是 0。

(2) 按式(12)计算新的 \mathbf{R}'_{aa} , 而 $\mathbf{R}_{ab}, \mathbf{R}_{bb}$ 不变,组成 $2n_i \times 2n_i$ 矩阵 \mathbf{R}' 。

(3) 按式(13)计算新的对偶力 \mathbf{p}'_a 。

这样就完成了一次递归步进的计算,可继续进行下面的步进计算了。

数值算例 2 首先取 $n_i = 2$, 弹簧刚度与边界条件与保持不变,利用步进求解上章算例,计算结果见表 2。

可以看出,采用步进方法计算得出的位移与采用界带传递矩阵跳跃式计算得出的结果相一致,虽然存在部分差异,但相对误差已经控制在 10^{-8} 量级以内,这主要是由于步进计算的传递矩阵计算次数比跳跃式计算要多出大约一倍,舍入误差已经在所难免。注意 $j=1, 3, 5, 7, 9$ 站计算得出的内力项 p_{j-1}, p_j , 和表 1 中的内力项完全形同,正好验证了前文所提出的: n_i 次步进的积分结果与一次跳跃式积分结果相同。

如果取 $n_i = 3$, 在次近邻间连接弹簧 k_3 , 则此时界带的宽度为 3 层,如果还取 $n=10$ 进行计算,可以发现,由于此时 n/n_i 不再是整数,无法完整分割基本界带子结构,直接采用跳跃式传递矩阵计算出现困难。但这对步进式计算模式则毫无影响。设 $k_3 = 0.5$, 两端边界条件改为 $p_0 = 2, p_1 = 1, p_2 = 1$ 。注意 $p_0 + p_1 + p_2 = 4$, 可用于检验平衡条件。而右端则固定 $q_7 = q_8 = q_9 = 0$ 。利用步进式计算得出的结果见表 3。

分析计算结果可以发现,平衡条件和弹性本构关系满足的很好,读者可以行验证。

以上结果还可以利用跳跃式的传递矩阵进行验算,利用式(1~5)写出 $n_i = 3$ 跳跃式传递矩阵,利用表 3 中计算得出的 $\mathbf{q}_0 = [q_0, q_1, q_2]^T$ 连同边界条件 $\mathbf{p}_0 = [p_0, p_1, p_2]^T$ 组成初始变量 $\mathbf{v}_0 = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0\}^T$, 利用 \mathbf{v}_0 左乘跳跃式传递矩阵可得

$$\{\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3\}^T = \mathbf{S}_1 \mathbf{v}_0, \{\mathbf{q}_5, \mathbf{p}_5\}^T = \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 \mathbf{v}_0$$

可以验证当 $n_i = 3$ 时,步进三次与一次跳跃式传递矩阵计算的结果相一致,再次证明了前文的观点。

表 2 步进式界带结构传递辛矩阵计算结果 ($n_i = 2$)

Tab. 2 Numerical results obtained by using step-increase symplectic transfer matrix ($n_i = 2$)

	左边界 ($j=1$)	步进 1 次后左界带 ($j=2$)	步进 2 次后左界带 ($j=3$)	步进 3 次后左界带 ($j=4$)
q_{j-1}	4.105656802	3.605673647	3.105623110	2.605808414
q_j	3.605673647	3.105623110	2.605808414	2.105117736
p_{j-1}	-2	—	-2.000134766	-1.999494626
p_j	-1	—	-0.999865234	-1.000505374
p'_{j-1}	—	-2.333333333	-2.363636364	-2.365853659
p'_j	—	-0.666666667	-0.636363636	-0.634146341
	步进 4 次后左界带 ($j=5$)	步进 5 次后左界带 ($j=6$)	步进 6 次后左界带 ($j=7$)	步进 6 次后右界带 ($j=9$)
q_{j-1}	2.105117736	1.607695142	1.098076196	0
q_j	1.607695142	1.098076196	0.633974576	0
p_{j-1}	-2.001886729	-1.992958459	-2.026279434	-2.366025423
p_j	-0.998113271	-1.007041541	-0.973720565	-0.633974576
p'_{j-1}	-2.366013072	-2.366024518	-2.366025619	—
p'_j	-0.633986928	-0.633975482	-0.633974381	—

表 3 步进式界带结构传递辛矩阵计算结果 ($n_i = 3$)

Tab. 3 Numerical results obtained by using step-increase symplectic transfer matrix ($n_i = 3$)

	左边界 ($j=2$)	步进 1 次后左界带 ($j=3$)	步进 2 次后左界带 ($j=4$)	步进 3 次后左界带 ($j=5$)
q_{j-2}	2.759131818	2.365916077	2.089364816	1.67152879
q_{j-1}	2.365916077	2.089364816	1.671528786	1.288032744
q_j	2.089364816	1.671528786	1.288032745	0.917634024
p_{j-2}	-2	—	—	-2.073860867
p_{j-1}	-1	—	—	-1.340273737
p_j	-1	—	—	-0.585865396
p'_{j-2}	—	-2.142857143	-2.836065574	-2.670157068
p'_{j-1}	—	-1.571428571	-0.918032787	-1.027923211
p'_j	—	-0.285714286	-0.245901639	-0.301919720
	步进 4 次后左界带 ($j=6$)	步进 3 次后右界带 ($j=8$)	步进 4 次后右界带 ($j=9$)	
q_{j-2}	1.288032745	0.565580741	0	
q_{j-1}	0.917634024	0	0	
q_j	0.565580741	0	0	
p_{j-2}	-2.107265819	-1.979532592	-2.692811877	
p_{j-1}	-1.339760158	-1.561650396	-1.024397752	
p_j	-0.552974022	-0.458817012	-0.282790370	
p'_{j-2}	-2.682627041	—	—	
p'_{j-1}	-1.036690515	—	—	
p'_j	-0.280682444	—	—	

4 连续系统的能量形式及其界带分析方法

以上只是离散系统, 毕竟离散系统是连续系统的近似。于是要问, 在连续系统的情况下变形能究竟怎样表达。按分析结构力学的例题^[10], 有一次微商的能量, 其实就是向量节点间的弹簧。转化到连续系统, 有能量:

$$U_1(q) = \int_0^L M\dot{q}^2(x)/2 \cdot dx \quad (14)$$

可将它离散组成的刚度阵的形式。时滞弹簧则组成界带宽度的对称阵 \mathbf{K} , 变形能 $q^T \mathbf{K}q/2$ 。当转换到连续坐标时, 成为泛函

$$U_2(q) = \int_0^L \int_0^L [q(s)K(s,x)q(x)/2] \cdot ds dx \quad (15)$$

核函数 $K(s,x) = K(x,s)$ 。应明确

$$K(s,x) = 0, \text{ when } x > s + t_d \quad (16)$$

式中 t_d 是界带宽度。然后是

$$\min_{q(x)} [U_1(q) + U_2(q)] \quad (17)$$

完成式(14)的变分可得出微分-积分方程:

$$M\ddot{q}(x) - \int_0^L [K(s, x)q(s)] \cdot ds = 0 \quad (18)$$

对于 U_1 , 若是在频域求解, 则 $U_1 = \int_0^L (-M\omega^2 q^2/2) dt$, 成为能带分析了。

求解时滞系统只能离散成 $t = 0, \eta, \dots, j\eta, \dots, (n_f \eta = L)$ 。时滞的动能 $U_1(q)$ 在时间离散后成为

$$T = \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}}{2}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{M}{\eta} \quad (19)$$

先考虑定常系统, 此时 $K(s, x) = K(|s - x|)$, 就是说只依赖一个变量 $|s - x|$ 。于是变形能 $U_2(q)$ 的积分成为

$$U_2(q) = \int_0^L q(t) \left[\int_{t-t_d}^{t+t_d} [q(s-t)K(s-t)/2] \cdot ds \right] dt \quad (20)$$

微分-积分方程的分析求解, 还没有充分的研究。寻求离散求解是必然的途径。应考虑 $0 \sim t_d$ 应划分多少区段的问题, 最简单是取一个区段。设 L 划分为 m_e 个区段 $L = t_d \times m_e$, 每个区段再划分为 n_l 个子区段 $t_d = n_l \eta$; 其中两端 $[0, t_d]$ 处的 \mathbf{p}_0 , 以及 $[L - t_d, L]$ 处的 \mathbf{q}_{m_e-1} 为给定两端边界条件(考虑到过渡到动力学, 如果是初值条件则应给定 $[0, t_d]$ 处的 $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m_e-2}$ 为未知数。于是区域 $-t_d \leq s - t \leq t_d$ 离散得到 $2n_l + 1$ 个点, 包括点 $s = t$, 时滞离散的段数是 n_l 个, 有 $n_l + 1$ 点。离散后得到的代数矩阵本征值方程为 $(2n_l + 1) \times (2n_l + 1)$ 矩阵的本征值方程。

现在要计算 $x = k\eta$ 附近的变形能 $U_2(q)$ 积分, 式(18)的积分区间是 $-t_d \leq \tau \leq t_d, x = k\eta$ 有关的位移是 q_{k-1}, q_k, q_{k+1} 。积分时采用线性插值, 于是

$$q(s-t) = q(\tau) = \begin{cases} q_k + (q_{k+1} - q_k) \cdot \tau/t_d, & \text{when } \tau > 0 \\ q_k + (q_k - q_{k-1}) \cdot \tau/t_d, & \text{when } \tau < 0 \\ -t_d < \tau < t_d \end{cases} \quad (21)$$

i 号 ($i-1 \sim i$ 子区段中间两端节点位移是 q_{i-1}, q_i , 而分布则是

$$q(i\eta - \eta + \tau) = q_{i-1} + (q_i - q_{i-1}) \cdot \tau/\eta \quad (22)$$

首先观察 x 的一个步长, $x_k - x_{k-1} = \eta$ 区段的积分, 运用梯形近似积分公式有

$$U_2(q_{k-1}, q_k) = \int_{k\eta-\eta}^{k\eta} q(x) \left[\int_{-t_d}^{t_d} [q(x-\tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] dx \approx \frac{\eta}{2} \left[q_{k-1} \int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau + q_k \int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] \quad (23)$$

式中, 积分 $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 中的函数 $q(k\eta - \eta - \tau)$, 是在 x_{k-1} 附近; 而 $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 中的函数 $q(k\eta - \tau)$, 是在 x_k 附近的。

式(23)已将作用量的两重积分化成为其两端的积分: $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 与 $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 之和。可以看出, $q(k\eta - \tau)$ 在 $-t_d \leq \tau \leq t_d$ 范围内, 在离散后有以 q_k 为中心的 $n_l + 1$ 个节点对积分有贡献。同样 $q(k\eta - \eta - \tau)$ 在离散后也有以 q_{k-1} 为中心的 $n_l + 1$ 个节点对积分有贡献。表明, 区段 $x_{k-1} \sim x_k = k\eta$ 的作用量就是等带宽的矩阵。与前面的离散系统比较, 可以发现, 其矩阵的结构是一致的。这样, 前文的计算方法, 对于连续系统离散后的计算, 是可用的。由于 $t_d = n\eta$, 则

$$\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau = \int_{-n\eta}^{n\eta} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau = \frac{\eta}{2} [q_{k-n}k_n + 2q_{k-n+1}k_{n-1} + 2q_{k-n+2}k_{n-2} + \dots + 2q_{k+n-1}k_{n-1} + q_{k+n}k_n]$$

故可得

$$U_2(q_{k-1}, q_k) = \frac{\eta^2}{8} [q_{k-1}(q_{k-1-n}k_n + 2q_{k-n}k_{n-1} + \dots + q_{k-1+n}k_n) + q_k(q_{k-n}k_n + 2q_{k-n+1}k_{n-1} + \dots + q_{k+n}k_n)]$$

对于区段 $0 \sim 2t_d$, 将该区段划分为 $2n$ 份, 已知区段为 $[0, l_d]$, 待求区段为 $(l_d, 2l_d]$, 则离散后, 已知区段内共有 $n+1$ 个已知点, 下一个界带宽度内有 n 个未知节点。进而得到区段变形能公式为

$$U_2(q_0, q_{2n}) = \int_0^{2l_d} q(x) \left[\int_{-l_d}^{l_d} [q(x-|\tau|)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] dx = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_a \\ q_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_a \\ q_b \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ q_b \end{Bmatrix}_n = \{q_1, q_2, \dots, q_{2n}\}^T$$

至此连续结构两端边值问题的求解应该比较满意,而式(26)从数学模型上已可以过渡到分析动力学的时滞问题,因而分析动力学的时滞问题的计算也可尝试利用界带分析予以求解,方法和理论完全是一套体系,这正是下一步需要开展的工作。

5 结 语

辛的出现已经有 70 年多了。本来是从分析力学发展的,但随后却成为纯数学的表述,微分形式、切丛、余切丛、外乘积、Cartan 几何等。纯数学家特别喜欢采用公理体系。英国 1990 年皇家学会会长,现代纯数学大师, M. Atiyah 表示:“一些人认为公理是用来界定一个自我封闭的完整的数学领域的。我认为这是错的。公理的范围愈窄,您舍弃得愈多……。但是通过定义,舍弃了宣布您认为不感兴趣的东西,而从长远来看,您舍弃了很多根芽。如果您用公理化方法做了些东西,那么在一定阶段后您应该回到它的来源处,在那儿进行同花和异花受精,这样是健康的。”

离散系统的界带分析方法要求子结构宽度大于界带的宽度,这样才能保证积分计算时子结构单元既无重复,也无缺失。这样的要求使得界带分析方法似乎无法应用于连续系统的分析计算,但界带分析方法是基于分析结构力学和变分原理导出的,而连续系统的积分计算同样可以利用变分原理导入到辛体系下。基于辛体系这一共同的理论框架下,离散系统与连续系统的界带计算问题并无本质上的差异,毕竟都是分析结构力学的范畴。在辛体系下,不同的界带区段分割的方法只会影响对偶力的大小,而不会影响位移的计算;利用步进的方法,逐步计算不同划分方法下的对偶力便可完成任意步长的积分计算。因此,界带分析方法可以用于连续系统的分析计算,数值算例验证了理论算法的准确性,也为将界带分析方法引入到动力学时滞问题的分析打下了理论基础。

参考文献(References):

- [1] Eringen A C. *Nonlocal Continuum Field Theories* [M]. New York; Springer-Verlag, 2002.
- [2] Shi Y, Chen C Q, Zhang Y S, et al. Determination of

the natural frequency of a cantilevered ZnO nanowire resonantly excited by a sinusoidal electric field[J]. *Nanotechnology*, 2007, **18**(7):075709.

- [3] Phadikar J K, Pradhan S C. Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates[J]. *Computational Materials Science*, 2010, **49**:492-499.
- [4] Murmu T, Adhikari S. Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip[J]. *Mechanics Research Communications*, 2011, **38**:62-67.
- [5] 张洪武,姚 征,钟万勰. 界带分析的基本理论和计算方法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(3): 257-263. (ZHANG Hong-wu, YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Basic theory and algorithm for Inter-Belt analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(3):257-263. (in Chinese))
- [6] 姚 征,张洪武,王晋宝,等. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析[J]. 固体力学学报, 2008, **29**(1): 13-22. (YAO Zheng, ZHANG Hong-wu, WANG Ji-bao, et al. Symplectic analysis for phonon dispersion of carbon nanotubes based on inter-belt model[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, **29**(1):13-22. (in Chinese))
- [7] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [8] 钟万勰. 分析结构力学与有限元[J]. 动力学与控制学报, 2004, **2**(3): 1-8. (ZHONG Wan-xie. Analytical structural mechanics and finite element[J]. *Chinese Journal of Dynamics and Control*, 2004, **2**(3):1-8. (in Chinese))
- [9] 高 强,钟万勰. Hamilton 系统的保辛-守恒积分算法[J]. 动力学与控制学报, 2009, **7**(3): 193-199. (GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. The symplectic and energy preserving method for the integration of hamilton system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, **7**(3):193-199. (in Chinese))
- [10] 钟万勰. 力、功、能量与辛数学[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2009. (ZHONG Wan-xie. *Force, Work, Energy and Symplectic Mathematics* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2009. (in Chinese))

Structural damage identification using additional virtual masses

HOU Ji-lin^{*1}, WANG Zhen-zhen¹, OU Jin-ping^{1,2}, Łukasz JANKOWSKI³

(1. School of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, China;

2. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China;

3. Smart-Tech Centre, Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw 02-106, Poland)

Abstract: It is big challenging to identify the damage of the structures accurately in civil engineering, since the structures usually are huge, complex, and insensitive to local damage. Aiming at this problem, Adding virtual mass method is proposed for improving the sensitivity of every substructure, and realizing the accurate identification of global structure. First, The frequency response with addition mass is constructed using the knowing the excitation and acceleration response by virtual distortion method (VDM), which is a fast structural reanalysis method; then the quantity of mass and the according select natural frequency which high sensitivity are determined by the sensitivity analysis and the relationship between the mass and natural frequency; last, the damage of the global structure can be identified precisely using the combined natural frequencies of the all the virtual structures, of which each is constructed by adding mass on the according substructure. A finite element model of a plan frame with 2 floors is used to verify the proposed additional virtual mass method.

Key words: structural health monitoring (SHM); damage identification; virtual distortion method (VDM); sensitivity analysis; natural frequency

(上接第 756 页)

Inter-belt analysis of continuous system

YAO Zheng^{*1}, ZHANG Hong-wu², ZHONG Wan-xie²

(1. Traffic Transportation Equipment and Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on analytic structural mechanics, the interface of the two nearest sub-structures extends to a region with a certain width, named inter-belt, where the inter-belt theory and the corresponding algorithm under the framework of symplectic system can analyze the nonlocal characteristic of structures. The inter-belt theory is firstly applied in the analysis of discrete system and achieves succeed, which demonstrates the veracity and feasibility of the theory. The discrete system partitions sub-structures by inter-belt width (the region of influence), hence the minimum step-size of section integral is restricted; however the integral operation of continuous system needs arbitrary step-size. By presenting the step-increase algorithm, the inter-belt theory can deal with the integral problem of continuous system with arbitrary step-size. Numerical examples are carried out to demonstrate the validity of the theory and algorithm developed. As a basic research work, the present study illustrates well the potential of the inter-belt theory and is valuable for the further research in analytic dynamics.

Key words: inter-belt analysis; symplectic method; analytic structural mechanics; sub-structure technique